2. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Основные понятия

Система счисления (ССч) — набор знаков, используемых для записи чисел и правила записи чисел. Эти знаки называются ***цифрами.***

Набор этих цифр называется ***алфавитом системы счисления.***

Количество цифр в алфавите называется ***мощностью алфавита.***

Различают позиционные и непозиционные системы счисления.

Если для каждого числа системы счисления выполняется правило: вес цифры (ее значение) зависит от положения цифры в числе, такая система счисления называется ***позиционной.*** Если хотя бы для одного числа это правило не выполняется, система счисления называется ***непозиционной.***

Пример непозиционной системы счисления — римская. В ней для числа II вес каждой цифры одинаков (равен единице).

Количество цифр в позиционной системе счисления называется ***основанием*** системы счисления. Именно во столько раз вес каждого разряда больше веса соседнего.

Основание — основная характеристика позиционной системы счисления.

Система счисления, которой мы пользуемся в повседневной жизни и которую изучаем в школе, — десятичная позиционная. Десятичная — потому что в ней используется десять цифр для записи чисел (от «0» до «9»), и именно в десять раз вес каждого разряда отличается от соседнего (вес сотен в десять раз больше веса десятков).

Самое маленькое основание позиционной системы счисления — 2.

Это самая простая система счисления для записи чисел, в ней всего два знака — «0» и «1». Поэтому именно двоичная система счисления используется для хранения чисел в компьютере.

Если нужно записывать числа в системе счисления, основание которой больше 10, привычных арабских цифр (от 0 до 9) не хватает и принято использовать буквы латинского алфавита: десять — A, одиннадцать — B и т.д.

Обычно используется 16-теричная система счисления.

При записи чисел в различных системах счисления принято записывать основание системы счисления справа внизу возле числа. Например, число 6 в восьмеричной системе счисления записывают: 6_8. Если основание системы счисления справа внизу возле числа не указано, считается, что это десятичная система счисления.

Для перевода числа из какой-либо системы счисления в десятичную необходимо:

1) пронумеровать разряды числа справа налево, начиная с нуля;
2) умножить каждую цифру числа на основание его системы счисления, возведенное в степень номера этого разряда;
3) сложить полученные числа.

Для перевода десятичного числа в другую систему счисления необходимо:

1) делить нацело с остатком число на нужное основание системы счисления;
2) получившееся частное (целое) тоже делить нацело с остатком на это основание;
3) продолжать деления до тех пор, пока частное не получится равно нулю;
4) выписать остатки в порядке, обратном их получению.

Практическая часть

2.1. Расставьте необходимые термины напротив их определений.

Термины: система счисления, алфавит системы счисления, мощность алфавита, основание системы счисления.

____________________	а) количество цифр, используемых при записи чисел
____________________	б) набор цифр, используемых при записи чисел и правила записи чисел
____________________	в) правила записи цифр
____________________	г) набор цифр, используемых при записи чисел
____________________	д) количество цифр в алфавите позиционной системы счисления

2.2. Чем отличается позиционная система счисления от непозиционной?

Ответ: ____

____.

2.3. В позиционной системе счисления во сколько раз вес (значение) каждого разряда больше предыдущего?

Ответ: ____.

2.4. В N-ичной системе счисления для записи чисел используется ____ различных цифр. Самая маленькая цифра равна ____ . Самая большая цифра равна ______ .

2.5. В N-ичной системе счисления число, которое на 1 больше, чем самая старшая цифра, записывается как ______ .

2.6. В двоичной системе счисления для записи чисел используются только ____ и ____ .

2.7. В шестнадцатеричной системе счисления кроме обычных десяти арабских цифр (от 0 до 9) используются также ____ букв латинского алфавита: от ____ до ____ . Цифра «десять» записывается как ____ , цифра «________________________» записывается как F.

2.8. Обозначьте на рисунке следующие термины (обведите и подпишите или напишите термин и стрелками укажите их): разряд, номер разряда, основание системы счисления.

$$\begin{matrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 6 \end{matrix}_{8}$$

2.9. В шестнадцатеричной системе счисления между числами $2B_{16}$ и $2E_{16}$ находятся числа $\_\_\_\__{16}$ и $\_\_\_\__{16}$.

2.10. Заполните пустые клетки таблицы последовательными числами в системах счисления с основанием 3, 4, 5 (таблицу соответствия между десятичной, двоичной и шестнадцатеричной системами счисления мы рекомендуем вам выучить наизусть).

Система счисления

10	2	8	16	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	10	2	2			
3	11	3	3			
4	100	4	4			
5	101	5	5			
6	110	6	6			
7	111	7	7			
8	1000	10	8			
9	1001	11	9			
10	1010	12	A			
11	1011	13	B			
12	1100	14	C			
13	1101	15	D			
14	1110	16	E			
15	1111	17	F			
16	10000	20	10			
17	10001	21	11			

2.11. После числа: 100111_2 212_3 37_8 BF_{16} 21333_4 66_7

следует число: $\_\_\_\_\__2$ $\_\_\_\_\__3$ $\_\_\_\_\__8$ $\_\_\_\_\__{16}$ $\_\_\_\_\__4$ $\_\_\_\_\__7$

2.12. Числу: 10100_2 2100_3 520_8 $A00_{16}$ 3120_4 50_7

предшествует число: $\_\_\_\_\__2$ $\_\_\_\_\__3$ $\_\_\_\_\__8$ $\_\_\_\_\__{16}$ $\_\_\_\_\__4$ $\_\_\_\_\__7$

2.13. Между числами: 1111_2 и 10001_2 BF_{16} и $C1_{16}$ 2221_3 и 10000_3 109_{16} и $10B_{16}$

стоит число: $\_\_\_\_\__2$ $\_\_\_\_\__{16}$ $\_\_\_\_\__3$ $\_\_\_\_\__{16}$

2.14. В каждом столбце обведите большее число и подчеркните меньшее:

10010_2	2010_3	507_8	$A00_{16}$	10000_4	$1FF_{16}$
1111_2	1112_3	277_8	$E0F_{16}$	30000_4	$F00_{16}$
10100_2	2212_3	374_8	$10D_{16}$	23012_4	333_{16}
11000_2	1222_3	630_8	CFF_{16}	32100_4	ABC_{16}

2.15. Расставьте цифры — порядок выполнения действий при переводе из любой системы счисления в десятичную:

☐ сложить все числа

☐ пронумеровать разряды числа справа налево, начиная с нуля

☐ цифру каждого разряда умножить на основание системы счисления, возведенное в степень номера разряда

2.16. Расставьте цифры — порядок выполнения действий при переводе из десятичной системы счисления в любую другую:

☐ выписать остатки от деления слева направо в порядке, обратном их получению

☐ повторять действие ____ до тех пор, пока частное от деления не будет равно нулю

☐ поделить число нацело с остатком на основание системы счисления, в которую переводим

Напоминание. При переводе из двоичной системы счисления в десятичную цифры, которые нужно умножать на число 2 в какой-то степени, равны 0 или 1. Все, что умножено на 0, все равно дает ноль. Поэтому эти слагаемые лучше просто опустить. Все, что умножено на 1, таким же и остается. Поэтому эти умножения тоже лучше просто опустить. Получается, достаточно просто сложить степени «двойки», в разрядах которых стоят «единицы».

2.17. Переведите числа в десятичную систему счисления (заполните пропущенные в клетках цифры):

$$\overset{\square\,2\,\square\,0}{2314_5} = \square\cdot 5^3 + 3\cdot 5^{\square} + 1\cdot\square^1 + \square\cdot 5^0 = 250 + \square\square + \square + 4 = \square\square\square_{10}$$

$$\overset{\square\square\square\square\,2\,\square\square}{1010011_2} = 2^6 + 2^{\square} + 2^{\square} + 1 = \square\square + 16 + \square + 1 = \square\square_{10}$$

$$\overset{\square\square\square}{2AB_{16}} = \square\cdot 16^2 + 10\cdot\square\square^{\square} + \square\square = 512 + \square\square\square + \square\square = \square\square\square_{10}$$

2.18. Переведите числа в десятичную систему счисления:

1010110_2= ____________________

21020_3= ____________________

526_8= ____________________

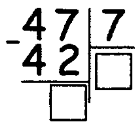
$3CE_{16}$= ____________________

3021_4= ____________________

256_7= ____________________

Для успешного выполнения следующих заданий по системам счисления необходимо хорошо помнить материал младшей школы.

2.19. Выполните деление в целых числах:

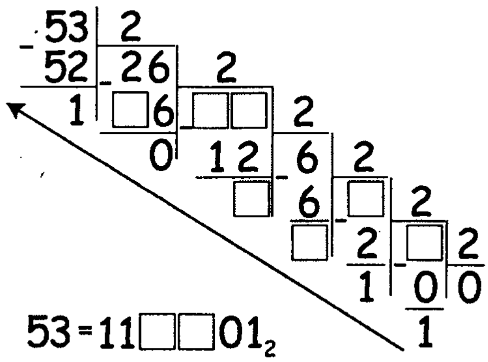


То есть 47 делить на 7, получится ___ целых и ___ в остатке.

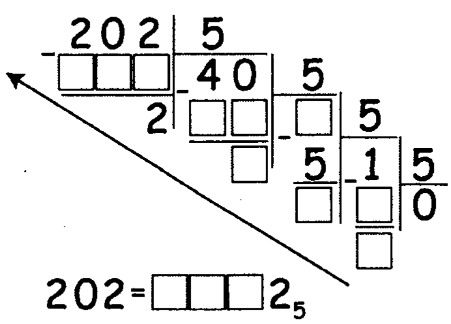
2.20. 23 делить на 5, получится ___ целых и ___ в остатке.

2.21. 7 делить на 9, получится ___ целых и ___ в остатке.

2.22. Переведите число 53 в двоичную систему счисления:



2.23. Переведите число 202 в пятеричную систему счисления:



2.24. Переведите числа в указанные системы счисления:

57_{10}	65_{10}	335_{10}	202_{10}	198_{10}	139_{10}
$\_\_\_\_\_\__2$	$\_\_\_\_\_\__3$	$\_\_\_\_\_\__8$	$\_\_\_\_\_\__{16}$	$\_\_\_\_\_\__4$	$\_\_\_\_\_\__7$

Замечание. При переводе десятичного числа в двоичную систему счисления можно воспользоваться более быстрым способом (хотя и более ненадежным, с точки зрения вероятности ошибки).

Разложить исходное число на сумму степеней двойки (от большей к меньшей), после чего поставить единицы в те позиции двоичного числа, степени которых присутствуют в этой сумме. Остальные позиции заполнить нулями:

$$83 = 64 + 19 = 64 + 16 + 3 = 64 + 16 + 2 + 1 = 2^6 + 2^4 + 2^1 + 2^0 = 1010011_2$$

Получив сумму степеней «двойки» рекомендуем такой прием: начинаем про себя называть степени двойки, с самой старшей (в данном примере, с шести), по убывающей, подряд, до нуля. Для каждой названной степени записываем друг за другом цифры: «1» — если такая степень есть в сумме, или «0» — если такой степени нет.

В данном примере для степеней 6, 4, 1 и 0 записали «1», а для 5, 3 и 2 — «0».

Для эффективного использования этого метода необходимо наизусть знать степени числа «2». Вообще говоря, это знание очень поможет вам решать множество задач ЕГЭ по информатике. Мы рекомендуем заранее выучить степени двойки хотя бы до 10-й, а лучше — до 16-й.

Напоминание. Две системы счисления будем называть **родственными**, если основание одной системы счисления равно степени основания другой. Например, 2 и 8, 2 и 16, 3 и 9.

Для произвольной пары систем счисления, чтобы перевести число из одной системы в другую, нужно осуществлять два перевода — сначала из исходной в десятичную, потом из десятичной в нужную. В родственных системах счисления можно осуществлять перевод напрямую. Чтобы не описывать процесс в общем виде (который вам, вероятно, никогда не понадобится), мы остановимся на системах счисления $2 \leftrightarrow 8$, $2 \leftrightarrow 16$.

Замечание. Вы будете гораздо быстрее осуществлять действия по переводу чисел в родственных системах счисления, если выучите наизусть таблицу соответствия цифр от 0 до 15 в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления (таблицу мы привели несколькими страницами ранее). Это существенно сэкономит вам время на экзамене.

При решении нижеследующих задач настоятельно рекомендуем этой таблицей не пользоваться — либо выучите ее наизусть, либо научитесь переводить числа «на лету». Если вы будете просто заглядывать в таблицу — не научитесь делать это сами и не сможете осуществлять перевод на экзамене.

2.25. Расставьте цифры — порядок выполнения действий при переводе из двоичной системы счисления в восьмеричную:

☐ записать получившиеся цифры в том же порядке, в котором записаны группы разрядов

☐ сгруппировать разряды группами по 3, справа налево

☐ двоичное число в каждой группе перевести в десятичную систему счисления

2.26. Переведите число 10001101_2 в восьмеричную систему счисления:

$$\underbrace{10}\underbrace{001}\underbrace{101}_2 \qquad \overset{2}{1}\overset{1}{0}\overset{0}{1}_2 = 2^2 + 2^0 = 4 + 1 = 5$$

$$\square\,\square\ \ 5_8$$

2.27. Переведите числа 11111100_2 и 1010110_2 в восьмеричную систему счисления:

$$11111\underbrace{100}_2 \qquad 1010110_2$$

$$\square\,\square\,\square_8 \qquad \square\,\square\,\square_8$$

2.28. Расставьте цифры — порядок выполнения действий при переводе из двоичной системы счисления в шестнадцатеричную:

☐ записать получившиеся цифры в том же порядке, в котором записаны группы разрядов

☐ сгруппировать разряды группами по ____ , справа налево

☐ двоичное число в каждой группе перевести в десятичную систему счисления

☐ получившееся десятичное число перевести в 16-ю цифру

2.29. Переведите число 11010101101_2 в шестнадцатеричную систему счисления:

$$\underbrace{110}_{\square = \square}\underbrace{1010}_{\square = \square}\underbrace{1101}_{13 = D_{16}}{}_2 \qquad \overset{3210}{1101_2} = 2^3 + 2^2 + 2^0 = 8 + 4 + 1 = 13$$

2.30. Переведите числа 1111111100_2 и 11101011110_2 в шестнадцатеричную систему счисления:

$$111111\underbrace{1100}_2 \qquad 11101011110_2$$

$$\square\,\square\,\square_{16} \qquad \square\,\square\,\square_{16}$$

2.31. Расставьте цифры — порядок выполнения действий при переводе из восьмеричной системы счисления в двоичную:

☐ выписать тройки двоичных разрядов друг за другом в том же порядке, в котором стоят цифры восьмеричного числа

☐ каждую цифру восьмеричного числа перевести в двоичную систему счисления

☐ если двоичное представление цифры состоит меньше чем из трех разрядов, дописать слева один или два нуля, чтобы всего получилось ровно три разряда

Пример.

$$532_8 \to \overbrace{101}\overbrace{011}\overbrace{010}{}_2$$

$$5 = 4 + 1 = 2^2 + 2^0 = 101_2$$

$$3 = 2 + 1 = 2^1 + 2^0 = 11_2$$

$$11_2 = 011_2$$

2.32. Переведите число 714_8 в двоичную систему счисления:

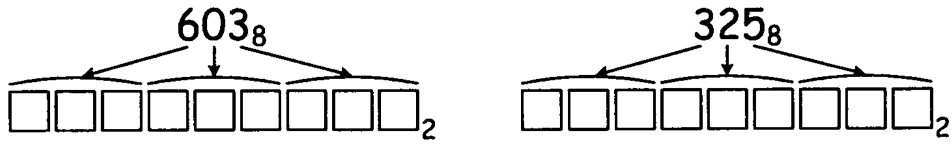
$$714_8 \to \overbrace{\square\square 1}\,\overbrace{\square\square\square}\,\overbrace{1\square\square}{}_2$$

$$7 = 4 + \square + 1 = 2^{\square} + 2^1 + 2^{\square} = \square\square 1_2$$

$$4 = 2^{\square} = 1\square\square_2$$

$$1 = 1_2 = \square\square\square_2$$

2.33. Переведите числа 603_8 и 325_8 в двоичную систему счисления:



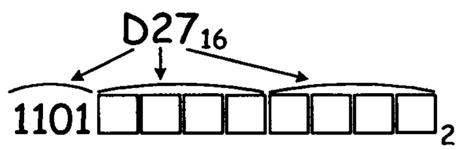
2.34. Расставьте цифры — порядок выполнения действий при переводе из шестнадцатеричной системы счисления в двоичную:

☐ выписать четверки двоичных разрядов друг за другом в том же порядке, в котором стоят цифры шестнадцатеричного числа

☐ если двоичное представление цифры состоит меньше чем из ____ разрядов, дописать слева один или два нуля, чтобы всего получилось ровно ____ разряда

☐ каждую цифру шестнадцатеричного числа перевести в двоичную систему счисления

2.35. Переведите число $D27_{16}$ в двоичную систему счисления:

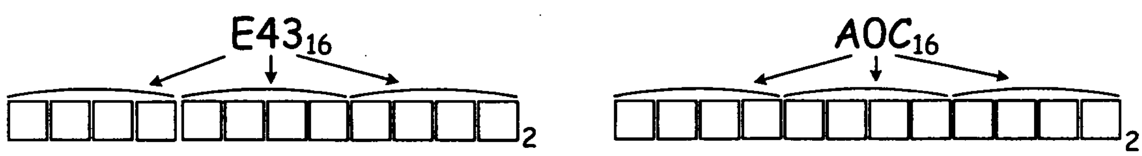


$D_{16} = 13 = 8 + 4 + 1 = 2^3 + 2^2 + 2^0 = 1101_2$

$2 = 2^{\square} = \square\square\square\square_2$

$7 = \square + 2^{\square} + 1 = 2^{\square} + 2^{\square} + 2^{\square} = \square\square\square\square_2$

2.36. Переведите числа $E43_{16}$ и $A0C_{16}$ в двоичную систему счисления:



2.37. Дано $a = D7_{16}$, $b = 331_8$. Какое из чисел c, записанных в двоичной системе, отвечает условию $a < c < b$?

1) 11011001 2) 11011100 3) 11010111 4) 11011000

Рекомендация. Так как все варианты ответов даны в двоичной системе счисления, имеет смысл перевести числа a и b в двоичную систему счисления, выбрать из них меньшее, прибавить к нему столбиком «1» и поискать результат среди вариантов ответа.

2.38. Дано $a = 263_8$, $b = B5_{16}$. Какое из чисел c, записанных в двоичной системе, отвечает условию $a < c < b$?

1) 10110010 2) 10110101 3) 10110110 4) 10110100

2.39. Дано $a = C6_{16}$, $b = 310_8$. Какое из чисел c, записанных в двоичной системе, отвечает условию $a < c < b$?

1) 11000111 2) 11000101 3) 11001001 4) 11001000

2.40. Дано $a = A4_{16}$, $b = 246_8$. Какое из чисел c, записанных в двоичной системе, отвечает условию $a < c < b$?

1) 10100110 2) 10100111 3) 10100101 4) 10100011

2.41. Дано $a = 341_8$, $b = E3_{16}$. Какое из чисел c, записанных в двоичной системе, отвечает условию $a < c < b$?

1) 11100000 2) 11100001 3) 11100010 4) 11100100

2.42. Сколько единиц в двоичной записи числа 197?

Ответ:

2.43. Сколько единиц в двоичной записи числа 243?

Ответ:

2.44. Сколько значащих нулей в двоичной записи числа 124?

Ответ:

2.45. Сколько значащих нулей в двоичной записи числа 203?

Ответ:

Напоминание. Для перевода дробных чисел в другую систему счисления нужно:

1. Отдельно перевести целую часть по обычным правилам
2. Дробную часть числа умножить на основание системы счисления
3. Из получившегося числа: целая часть (цифра) — записать ее как очередной разряд (дробный) результирующего числа и отбросить
4. Действия 2–3 повторять до тех пор, пока дробная часть не станет равна нулю или пока не будет достигнуто требуемое количество разрядов (точность)

Пример. Перевести число 7,625 в двоичную систему счисления.

Решение

Переводим отдельно число 7: $7=4+2+1=2^2+2^1+2^0=111_2$.

Дробную часть числа (0,625) умножаем на 2. Получается 1,25.

Целую часть числа (1) дописываем после запятой в результирующее число.
Получается пока $111{,}1_2$.
Отбрасываем целую часть. Остается 0,25. Умножаем ее на 2. Получается 0,5.
Целую часть числа (0) дописываем в результирующее число. Получается $111{,}10_2$.
Отбрасываем целую часть (она в данном случае равна нулю, так что отбрасывать нечего). Умножаем оставшееся на 1. Получается 1,0.
Целую часть числа (1) дописываем в результирующее число. Получается $111{,}101_2$.
Так как дробная часть числа получилась равна нулю, мы получили окончательный ответ: $7{,}625_{10}=111{,}101_2$.

2.46. Сколько единиц в двоичной записи числа 67,5?

Ответ:

2.47. Сколько единиц в двоичной записи числа 23,375?

Ответ:

2.48. Сколько значащих нулей в двоичной записи числа 19,125?

Ответ:

2.49. Сколько значащих нулей в двоичной записи числа 37,875?

Ответ:

2.50. Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 25, запись которых в системе счисления с основанием четыре оканчивается на 11.

Ответ:

Пример решения. Искомое число в четверичной системе счисления оканчивается на 4. Это значит, что оно имеет вид: $X11_4$, где X — некоторое количество четверичных разрядов. По схеме перевода числа из четверичной системы счисления в десятичную получаем, что

$$X11_4 = X \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 = X \cdot 16 + 4 + 1 = 16 \cdot X + 5.$$

Это число должно быть не больше 25. Получаем неравенство: $16 \cdot X + 5 \le 25$. Это равносильно тому, что $16 \cdot X \le 20$. При этом X — целое неотрицательное число. Простым подбором получаем, что нас устраивают $X = 0$ и $X = 1$. Значит, искомые числа: $16 \cdot 0 + 5$ и $16 \cdot 1 + 5$. То есть 5 и 21.

2.51. Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 25, запись которых в двоичной системе счисления оканчивается на 110.

Ответ:

2.52. Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 25, запись которых в троичной системе счисления оканчивается на 21.

Ответ:

2.53. Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 35, запись которых в системе счисления с основанием пять оканчивается на 13.

Ответ:

2.54. Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 25, запись которых в двоичной системе счисления оканчивается на 101.

Ответ:

2.55. Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 23 оканчивается на 2.

Ответ:

Пример решения. При переводе из десятичной в другую систему счисления нужно делить нацело с остатком исходное число на основание нужной системы счисления. При этом самый первый получающийся остаток — это самый младший разряд результирующего числа. То есть именно на него результат будет оканчиваться. В данном случае остаток будет равен двум. Это означает, что исходное число 23 должно быть (по определению целочисленного деления с остатком) представлено в виде: $23 = nk + 2$. Где n и k — натуральные числа. Вычитая из обеих частей равенства 2, получаем $21 = nk$. То есть достаточно найти все делители числа 21. При этом нужно не забыть, что остаток не может быть меньше делителя (основания системы счисления). Значит, нас устраивают все делители числа 21, которые больше двух. Это 3, 7, 21.

2.56. Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 27 оканчивается на 3.

Ответ:

2.57. Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 30 оканчивается на 8.

Ответ:

2.58. Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 31 оканчивается на 4.

Ответ:

2.59. Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 29 оканчивается на 3.

Ответ:

2.60. В системе счисления с некоторым основанием число 17 записывается в виде 101. Укажите это основание.

Ответ:

Пример решения. По правилу перевода числа в десятичную систему счисления из какой-либо другой (обозначим ее буквой X):

$$101_X = 1 \cdot X^2 + 0 \cdot X^1 + 1 \cdot X^0 = X^2 + 1.$$

По условию это число 17. Решаем уравнение $X^2 + 1 = 17$. Это равносильно $X^2 = 16$. Откуда $X = \pm 4$. -4 отбрасываем, так как основание позиционной системы счисления должно быть больше 1. *Ответ*: 4.

2.61. В системе счисления с некоторым основанием число 19 записывается в виде 201. Укажите это основание.

Ответ:

2.62. В системе счисления с некоторым основанием число 30 записывается в виде 110. Укажите это основание.

Ответ:

2.63. В системе счисления с некоторым основанием число 21 записывается в виде 111. Укажите это основание.

Ответ:

2.64. В системе счисления с некоторым основанием число 57 записывается в виде 321. Укажите это основание.

Ответ:

Напоминание. Для правильного осуществления действий в системах счисления необходимы знания 1-го класса — как складывать и вычитать числа «столбиком». Вспомним это. Пусть необходимо сложить числа 2465 и 637. Обычные десятичные числа.

Если вы в лоб примените наработанные с детства методы в другой системе счисления — вы гарантированно ошибетесь. Например, с первого взгляда очевидно, что 5 + 7 = 12. Но вот $5_8 + 7_8$ вовсе уже не равно 12_8. $5_8 + 7_8 = 14_8$. Не поленитесь, аккуратно разберите следующий пример — как это нужно делать по действиям.

Сначала запишем оба исходных числа друг под другом, выровняв их по правому краю (по младшему разряду):

$$+\begin{array}{r}2465\\637\end{array}$$

Начинаем с младшего разряда (самого правого). Сложим цифры. 5 + 7 = 12. Цифру «2» запишем в этом разряде, «1» (которая на самом деле 10) — это перенос в следующий разряд:

$$+\begin{array}{r}2465\\637\\\hline 2\\\wedge\end{array}$$

В следующем разряде складываем 6 + 3 + 1 (из предыдущего разряда) = 10.

Цифру «0» пишем в этом разряде, «1» — перенос в следующий разряд:

$$+\begin{array}{r}2465\\637\\\hline 02\\\wedge\wedge\end{array}$$

Складываем 4 + 6 + 1 = 11. «1» пишем, «1» — перенос в следующий разряд:

$$+\begin{array}{r}2465\\637\\\hline 102\\\wedge\wedge\wedge\end{array}$$

В самом левом (старшем) разряде стоит «2», плюс «1» перенесли из предыдущего разряда. Итого «3»:

$$+\begin{array}{r}2465\\637\\\hline 3102\\\wedge\wedge\wedge\end{array}$$

Теперь попробуем сделать то же самое, но в восьмеричной системе счисления:

$$2465_8 + 637_8$$

Запишем оба исходных числа друг под другом, выровняв их по правому краю (по младшему разряду):

$$\begin{array}{r} 2465_8 \\ +\ \ 637_8 \end{array}$$

Начинаем с младшего разряда (самого правого). Сложим цифры. 5 + 7 = 12. Но вот только это совсем теперь не значит, что «2» — пишем, а «1» — переносим. Потому что получившееся у нас 12 — это десятичное число. А нам нужно восьмеричное. Поэтому мы переводим 12 в восьмеричную систему счисления. В общем случае нужно бы, конечно, делить «уголком» и выписывать остатки от деления. Но при сложении двух чисел в любой системе счисления не может получиться перенос в следующий разряд больше, чем «1». Поэтому результат деления всегда будет давать «1» в качестве частного (если, конечно, случился перенос). А это значит, что вместо деления «уголком» достаточно просто вычесть из получившейся суммы основание системы счисления. В данном случае, 12 – 8 = 4. То есть «4» пишем, «1» — переносим:

$$\begin{array}{r} 2465_8 \\ +\ \ 637_8 \\ \hline 4_8 \\ \wedge\ \ \end{array}$$

В следующем разряде складываем 6 + 3 + 1 (из предыдущего разряда) = 10. Это ≥ 8. Значит, перенос есть. Вычитаем 8: 10 – 8 = 2.
Цифру «2» пишем в этом разряде, «1» — перенос в следующий разряд:

$$\begin{array}{r} 2465_8 \\ +\ \ 637_8 \\ \hline 24_8 \\ \wedge\wedge\ \ \end{array}$$

Складываем 4 + 6 + 1 = 11. Перенос есть. Вычитаем 8. «3» пишем, «1» — перенос в следующий разряд:

$$\begin{array}{r} 2465_8 \\ +\ \ 637_8 \\ \hline 324_8 \\ \wedge\wedge\wedge\ \ \end{array}$$

В самом левом (старшем) разряде стоит «2», плюс «1» перенесли из предыдущего разряда. Итого «3». Переноса нет:

$$\begin{array}{r} 2465_8 \\ +\ \ 637_8 \\ \hline 3324_8 \\ \wedge\wedge\wedge\ \ \end{array}$$

2.65. Чему равна сумма чисел 43_8 и 56_8 (в восьмеричной системе счисления)?

Ответ:

2.66. Чему равна сумма чисел 110110110_2 и 1110111_2 (в двоичной системе счисления)?

Ответ:

2.67. Чему равна сумма чисел 132_4 и 233_4 (в четверичной системе счисления)?

Ответ:

Замечание. При действиях в шестнадцатеричной системе счисления нужно помнить также о том, что если в разряд нужно записать число, например 13, — это не значит, что «3» пишем, а «1» — переносим. Это значит, что в этом месте нужно написать шестнадцатеричную цифру «D».

Пример. Найти сумму чисел $DF5_{16}$ и $B7_{16}$ в шестнадцатеричной системе счисления.

Решение

В младшем разряде: 5 + 7 = 12. Это не значит, что «2» — пишем, а «1» — переносим. Так как $12 \leq 16$, то переноса нет. Нужно просто вспомнить, что $12 = C_{16}$:

$$\begin{array}{r} D\,F\,5_{16} \\ +\quad B\,7_{16} \\ \hline C_{16} \end{array}$$

В следующем разряде: F + B. Вспоминаем, что $F_{16} = 15$, а $B_{16} = 11$.
То есть 15 + 11 = 26. $26 \geq 16$. Перенос есть.
Вычитаем 16 из 26: 26 − 16 = 10.
Вспоминаем, что $10=A_{16}$. «A» — пишем, «1» — переносим:

$$\begin{array}{r} D\,F\,5_{16} \\ +\quad B\,7_{16} \\ \hline A\,C_{16} \\ \wedge\quad\quad \end{array}$$

В старшем разряде было «D». Плюс «1» перенесли. Значит, будет следующая шестнадцатеричная цифра (буква «E»). Получаем:

$$\begin{array}{r} D\,F\,5_{16} \\ +\quad B\,7_{16} \\ \hline E\,A\,C_{16} \\ \wedge\quad\quad\quad \end{array}$$

2.68. Чему равна сумма чисел CD_{16} и AE_{16} (в шестнадцатеричной системе счисления)?

Ответ:

2.69. Чему равна сумма чисел 43_8 и 56_{16}?

1) 121_8 2) 171_8 3) 69_{16} 4) 1000001_2

Рекомендация. Так как числа в условии и в вариантах ответа даны в разных системах счисления (причем родственных), имеет смысл сложение осуществлять в той системе счисления, из которой проще будет потом переводить в две другие. То есть в двоичной системе счисления. Если сумма двух исходных чисел в двоичной системе счисления не совпадет с двоичным вариантом, ее нужно будет перевести (группированием разрядов) в восьмеричную систему счисления и сравнить с другими вариантами. Если и здесь не будет совпадений — перевести сумму в шестнадцатеричную систему счисления и сравнить с имеющимся вариантом.

Общая рекомендация к заданиям части А. Если у вас отпали 3 варианта из четырех, не поленитесь, проверьте 4-й вариант на соответствие условию задачи. Этим вы сильно уменьшите вероятность совершения ошибки.

2.70. Чему равна сумма чисел 52_8 и 74_{16}?

1) 126_8 2) $5E_{16}$ 3) 1011110_2 4) 236_8

2.71. Чему равна сумма чисел 61_8 и 45_{16}?

1) 75_{16} 2) 1110110_2 3) 165_8 4) 177_8

2.72. Чему равна сумма чисел 70_8 и 23_{16}?

1) 173_8 2) $7B_{16}$ 3) 133_8 4) 1111011_2

2.73. Чему равна сумма чисел 23_8 и 67_{16}?

1) $7A_{16}$ 2) 1111000_2 3) 170_8 4) 38_{16}

2.74. Вычислите сумму чисел x и y, при $x = 1D_{16}$, $y = 72_8$. Ответ приведите в двоичной системе счисления.

Ответ:

Рекомендация. Если нужно найти сумму чисел, представленных в разных системах счисления, то нужно привести их в одну систему счисления. Если нужно сложить число в шестнадцатеричной и в восьмеричной системах счисления, проще всего перевести оба числа в двоичную систему счисления.

2.75. Вычислите сумму чисел x и y, при $x = A6_{16}$, $y = 75_8$. Ответ приведите в двоичной системе счисления.

Ответ:

2.76. Чему равна сумма чисел 43_8 и 56_{16}? Ответ приведите в двоичной системе счисления.

Ответ:

Напоминание. После сложения перейдем к вычитанию. Вспомним, как вычесть из 2007 число 29. Запишем меньшее под большим, выровняв по правой цифре.

Начинаем с младшего (правого) разряда. Пытаемся вычесть из семи девять. Не получается (9 > 7). Значит, нужно занять в предыдущем разряде. Но там стоит ноль. Значит, нужно занять в еще более предыдущем разряде. Но там тоже ноль. Значит, занимаем в еще более предыдущем:

$$\begin{array}{r} -2007 \\ 29 \end{array}$$

Из старшего разряда заняли «1». Значит, там осталось еще «1», в следующий разряд «свалилось» 10. Но из него заняли «1» (осталось 9). В следующий разряд тоже «свалилось» 10, заняли

«1», осталось 9. В младший разряд «свалилось» 10. Плюс там уже есть 7. Итого 10 + 7 = 17. Из этих 17 теперь вычитаем 9: 17 – 9 = 8. Это «8» пишем в младший разряд:

$$\begin{array}{r} -\dot{2}\dot{0}\dot{0}7 \\ 29 \\ \hline 8 \end{array}$$

Переходим к следующему разряду. Там над «0» стоит точка. Это напоминание, что мы из этого разряда занимали. Значит, сверху осталось «9» (самая старшая цифра нашей системы счисления), вычитаем из нее «2»: 9 – 2 = 7. Пишем это «7» в данный разряд:

$$\begin{array}{r} -\dot{2}\dot{0}\dot{0}7 \\ 29 \\ \hline 78 \end{array}$$

В следующем разряде вычитать уже ничего не нужно. Сверху стоит «0» с точкой над ним. Значит, это «9». Списываем это «9» вниз, в результат:

$$\begin{array}{r} -\dot{2}\dot{0}\dot{0}7 \\ 29 \\ \hline 978 \end{array}$$

В старшем разряде «2», над которой стоит точка. Значит, из этих «2» осталось «1». Снизу вычитать уже ничего не надо, списываем эту «1» вниз, в результат:

$$\begin{array}{r} -\dot{2}\dot{0}\dot{0}7 \\ 29 \\ \hline 1978 \end{array}$$

Рассмотрим то же действие, но теперь в шестнадцатеричной системе счисления:

$$2007_{16} - 29_{16}$$

Запишем меньшее под большим, выровняв по правой цифре.

Начинаем с младшего (правого) разряда. Пытаемся вычесть из семи девять. Не получается (9 > 7). Значит, нужно занять в предыдущем разряде. Но там стоит ноль. Значит, нужно занять в еще более предыдущем разряде. Но там тоже ноль. Значит, занимаем в еще более предыдущем. Пока все как в десятичной системе счисления:

$$\begin{array}{r} -\dot{2}\dot{0}\dot{0}7_{16} \\ 29_{16} \end{array}$$

Из старшего разряда заняли «1». Значит, там осталось еще «1», в следующий разряд «свалилось»... нет, не 10, как раньше. Ведь у нас не десятичная система счисления и вес каждого более старшего разряда не в 10 раз больше младшего, а в 16! То есть в следующий разряд «свалилось» 16. Но из него заняли «1» (осталось 15). В следующий разряд тоже «свалилось» 16, заняли «1», осталось 15. В младший разряд «свалилось» 16. Плюс там уже есть 7. Итого 16 + 7 = 23. Из этих 23 теперь вычитаем 9: 23 – 9 = 14. Но это «14» мы не пишем в младший разряд. Потому что у нас шестнадцатеричная система счисления и 14 — это должна быть одна цифра. То есть «E»:

$$\begin{array}{r} -\dot{2}\dot{0}\dot{0}7_{16} \\ 29_{16} \\ \hline E_{16} \end{array}$$

Переходим к следующему разряду. Там над «0» стоит точка. Это напоминание, что мы из этого разряда занимали. Значит, сверху осталось 15, вычитаем из нее «2»: 15 – 2 = 13. Это «D». Пишем это «D» в данный разряд:

$$\begin{array}{r} -\dot{2}\dot{0}\dot{0}7_{16} \\ 29_{16} \\ \hline DE_{16} \end{array}$$

В следующем разряде вычитать уже ничего не нужно. Сверху стоит «0» с точкой над ним. Значит, это «F» (самая старшая цифра в шестнадцатеричной системе счисления). Списываем это «F» вниз, в результат:

$$\begin{array}{r} -\dot{2}\,\dot{0}\,\dot{0}\,7_{16} \\ 2\,9_{16} \\ \hline F\,D\,E_{16} \end{array}$$

В старшем разряде «2», над которой стоит точка. Значит, из этих «2» осталось «1». Снизу вычитать уже ничего не надо, списываем эту «1» вниз, в результат:

$$\begin{array}{r} -\dot{2}\,\dot{0}\,\dot{0}\,7_{16} \\ 2\,9_{16} \\ \hline 1\,F\,D\,E_{16} \end{array}$$

2.77. Чему равно $A6_{16}-75_8$?

1) 31_8 2) 151_8 3) 31_{16} 4) 151_{16}

2.78. Чему равно $A6_{16}-75_8$?

1) 73_8 2) 53_8 3) 73_{16} 4) 53_{16}

2.79. Комплексное задание в системах счисления.

1) Получить исходное число: $230 + N$ (выберите N от 1 до 25).
2) Перевести число (столбиком) в двоичную, троичную, пятеричную ССч.
3) К полученному двоичному числу прибавить 1011_2 (столбиком).
4) Результат перевести в восьмеричную и шестнадцатеричную ССч (объединением разрядов).
5) К полученному восьмеричному числу прибавить (столбиком) 37_8.
6) Результат перевести в десятичную ССч.
7) Из полученного шестнадцатеричного числа отнять (столбиком) $1F_{16}$.
8) Результат перевести в десятичную ССч.
9) К полученному троичному числу прибавить (столбиком) 212_3.
10) Из полученного пятеричного числа отнять (столбиком) 34_5.

Схема выполнения задания: