Введение

Мы любим всё — и жар холодных числ,
И дар божественных видений,
Нам внятно всё — и острый галльский смысл,
И сумрачный германский гений...
А. Блок

Древнеиндийская модель мира

Пытаясь понять сложное устройство окружающего мира, люди издревле пытались представить его в упрощённом виде. Так в древней Индии родился образ плоской Земли, покоящейся на трёх слонах, стоящих на гигантской черепахе, плавающей в Мировом океане. Так возникла одна из первых умозрительных (то есть созданных в человеческом воображении) моделей мира.

Шли годы, совершая морские путешествия, люди поняли, что Земля имеет форму шара, окружённого неподвижными звёздами и подвижными планетами. Чтобы объяснить движение подвижных светил, астрономы Древней Греции представили, что планеты вращаются вокруг неподвижной Земли по сложным системам окружностей.

И тогда появилась модель мира Птолемея, на взгляд наших современников, сложная и далёкая от действительности. Тем не менее она была способна предсказать реальное движение планет с погрешностью не более одного градуса.

Через полтора тысячелетия польский астроном Коперник упростил модель мира, поменяв в ней местами Землю и Солнце. В новой модели семь планет вращались по круглым орбитам вокруг неподвижного Солнца. Модель Коперника настолько точно описывала движение светил, что, обнаружив небольшие отклонения от расчётов в движении самой далёкой седьмой планеты Солнечной системы Урана, учёные заподозрили, что их вызывает неизвестная планета. Так была «вычислена», а затем и обнаружена при помощи телескопа восьмая планета Нептун.

С бурным развитием науки в XX веке модель мира непрерывно изменялась. Люди обнаружили, что далёкие звёзды имеют такие же планетные системы, как и наше Солнце. Земля, представлявшаяся древним центром мира, оказалась самой рядовой планетой, «затерянной» на окраине нашей Галактики. Зато сегодня, опираясь на современные модели мира и вычислительные возможности современных компьютеров, учёные могут не только оценить размеры Вселенной и определить её возраст, но и обнаруживать «на кончике пера» такие объекты, которые трудно даже представить: «чёрные дыры», нейтронные звёзды, квазары.

Попробуем и мы с помощью такого мощного инструмента для вычислений, как электронные таблицы, разобраться в том, как моделировать на компьютере процессы окружающего нас мира.

§ 1. Моделирование, его роль в познании. Модели материальные и информационные

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ УРОКА

Наверное, некоторые из девушек, прочитав название параграфа, подумают: «Наконец-то в учебнике встретилось что-то интересное, ведь модельный бизнес – это так модно». Эти девушки мечтают стать фотомоделями.

А мальчишки хотят научиться управлять электрической моделью вертолёта, ведь это – первый шаг к освоению профессии лётчика.

Наконец, и те, и другие не прочь поиграть на компьютере в игру, моделирующую реальный мир. Например, создать новую цивилизацию или совершить полёт на Марс.

- Что вы видите общего в намерениях ребят? Сформулируйте основной вопрос урока. Сравните свою формулировку с авторской (с. 284 учебника).

НЕОБХОДИМЫЕ БАЗОВЫЕ ЗНАНИЯ

Вспомните, что такое файл, текст, таблица. (Учебники для 7-го и 8-го классов.)

Посмотрите в словаре, как объясняется слово «модель».

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Прочитайте отрывки из блога:

«Мы приехали с родителями в аэропорт с небольшим опозданием и, к счастью, увидели на табло, что наш авиарейс задерживается на полчаса...»

«Долетели мы отлично, но только при заходе на посадку самолёт попал в воздушную яму. Он резко пошёл вниз, а я, наоборот, подпрыгнула над креслом, и если бы не ремни, то взлетела бы! Конечно, я страшно испугалась. Папа улыбнулся мне и сказал: «Жива? Это была невесомость. Между прочим, все космонавты тренируются в пикирующем самолёте, чтобы привыкнуть к ней».

«Наконец-то моя мечта сбылась, мы в Париже!!! Точнее, мы в аэропорту, и до Парижа нам нужно ещё ехать на поезде. Мы пришли на ж.д. станцию RER, и нам пришлось выяснять по расписанию, какой именно поезд идёт до нужного нам Северного вокзала...»

«Я на Северном вокзале, но как же нам добраться до Монмартра, где находится наша гостиница? Так, пробуем сориентироваться по карте. Ах, если бы я знала французский...»

- Каким же образом наша героиня со своими родителями добралась до парижской гостиницы, не потерявшись в современном аэропорту, на железнодорожном вокзале и, наконец, в незнакомом мегаполисе, да ещё и не зная французского языка?

В каждой из ситуаций, когда вы сталкиваетесь со сложными или непонятными **объектами** (аэропорт, вокзал), **явлениями** (невесомость) и **процессами** (прогулка в незнакомом городе), на помощь вам приходят **модели** объектов, явлений и процессов – схемы, карты, таблицы, тренажёры, описания. И сложные и непонятные вещи сразу проясняются.

Люди создают модели, изучая окружающий мир. Процесс создания модели называется **моделированием**. Что моделируют люди? Часто это просто окружающие их **объекты**, естественные или рукотворные. Объекты могут быть очень большими для непосредственного изучения, как, например, земной шар. Поэтому люди придумали его модель: уменьшенную копию — глобус. Хотя и глобус не слишком удобен для путешественника, и люди стали использовать отпечатанные на пергаменте части его поверхности, прообразы современных карт.

Для того чтобы изучать поведение морских животных, люди ныряли под воду до тех пор, пока кому-то не пришла в голову идея посадить морских обитателей в большой сосуд с водой. Так появился аквариум — модель подводного мира.

Иногда объекты, созданные человеком, настолько сложно устроены, как, например, самолёт или ракета, или чрезвычайно малы и не менее сложны (наночастица), что исследовать, улучшать их и разрабатывать новые подобные проще (а зачастую единственно возможно) по моделям, схемам и чертежам, чем по оригиналам.

Похожая ситуация существует и с **явлениями природы**. Например, известно, что территория Японии подвержена землетрясениям. Надо каким-то образом научиться строить здания, устойчивые к землетрясениям и цунами. Можно, конечно, как и в старину, построить жилища из бамбука и рисовой бумаги и покрыть их камышом, тогда последствия землетрясения, возможно, сведутся, в худшем случае, к ушибам и лёгким травмам. Но современные люди хотят иметь комфортные жилища. Как построить одновременно комфортное и устойчивое здание? Здесь без моделирования не обойтись. Для этого создают специальные установки-вибростенды, способные имитировать (моделировать) землетрясение любой мощности на площадке размером 10×10 метров. Теперь макет здания можно построить на такой площадке и проверить на сейсмоустойчивость.

Модель такого грозного явления природы, как молния, вы можете увидеть в кабинете физики. Это маломощная электрическая искра. Тем не менее она ведёт себя как настоящая молния, даже издаёт звук, похожий на треск.

Процессы в окружающем нас мире — это те же явления, но рассматриваемые в развитии. Они также поддаются моделированию.

Например, представьте себе автобусную поездку из Москвы в Великий Устюг на родину Деда Мороза. Как следует ехать — через Ярославль и Вологду (900 км) или Ярославль и Кострому (960 км)? На первый взгляд кажется, что надо ехать кратчайшей дорогой. Но опытный водитель прежде, чем отправиться в путь, поинтересуется, нет ли на пути сильных снегопадов или участков с плохим дорожным покрытием.

Принять решение в данной ситуации вам поможет модель «Маршруты» web-сервисов Яндекса (http://maps.yandex.ru/?rt). С помощью этой модели вы сможете найти быстрейший путь за считаные секунды. Это простой пример, но если рассматриваемый процесс сложней, чем автобусная поездка, то без модели в нём просто не разобраться.

Как вы заметили, модель используют в тех случаях, когда трудно или невозможно иметь дело с оригиналом.

По способу представления оригинала модели бывают материальные и информационные.

Материальные модели воспроизводят свойства оригинала в вещественной форме. Примеры: школьный глобус – модель Земли из папье-маше; игрушечный самолётик из бумаги, способный летать, – модель настоящего самолёта.

Информационные модели описывают оригиналы на каком-либо языке: естественном или специальном. Например, расписание автобусов даёт представление о работе автостанции, а уравнение закона всемирного тяготения описывает движение планет вокруг Солнца.

Можно даже сказать, что, описывая увиденное, например интересного человека или новый автомобиль, вы создаёте его информационную модель.

Частный случай информационных моделей – **математические модели**. Прежде с ними имели дело почти исключительно учёные и инженеры. Например, восьмая планета Солнечной системы Нептун была обнаружена астрономами лишь после того, как её существование было предсказано математиками по отклонениям движения седьмой планеты – Урана от расчётных данных.

Математические модели пришли в нашу повседневную жизнь благодаря компьютеру. То, что было раньше уделом учёных, теперь доступно всем, включая школьников. Компьютер не только быстро вычисляет, но помогает наглядно представить поведение объекта моделирования во время расчётов. Примеры таких компьютерных математических моделей: GPS-навигатор для водителя автомобиля; компьютерный тренажёр для обучения пилотированию самолёта.

В качестве инструмента для дальнейшего изучения моделей мы будем использовать электронные таблицы (ЭТ). Эти программы относятся к семейству инструментов для создания таблиц, табличных вычислений в них и построения графиков по табличным данным.

ОБОБЩЕНИЕ НОВЫХ ЗНАНИЙ

Модель – это макет, описание, изображение, схема, используемые для облегчения познания окружающего мира и упрощения процесса разработки новых конструкций.

Процесс создания модели называется моделированием. Модели бывают материальные и информационные, в том числе математические.

ПРИМЕНЕНИЕ ЗНАНИЙ

1. Запустите электронные таблицы, откройте файл мод1.xls.

Занесите в таблицы возможные модели для перечисленных объектов, явлений и процессов.

2. При помощи операций копирования и вставки занесите в столбец A таблицы под заголовком «Материальные» материальные модели, а в столбец G под заголовком «Информационные» – информационные модели. Если вы сомневаетесь или считаете, что данная модель не относится ни к материальным, ни к информационным, то скопируйте название модели в столбец D.

Указание. Чтобы ничего не пропустить, заливайте скопированные вами ячейки цветом.

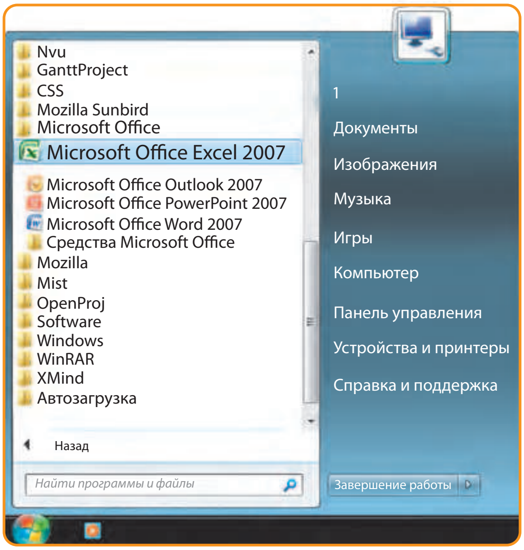
Переименуйте рабочий лист *Лист1* – назовите его «Модели».

Сохраните результат в папке и под именем, которые укажет учитель. Документ пригодится вам в будущем.

ОПЕРАЦИИ

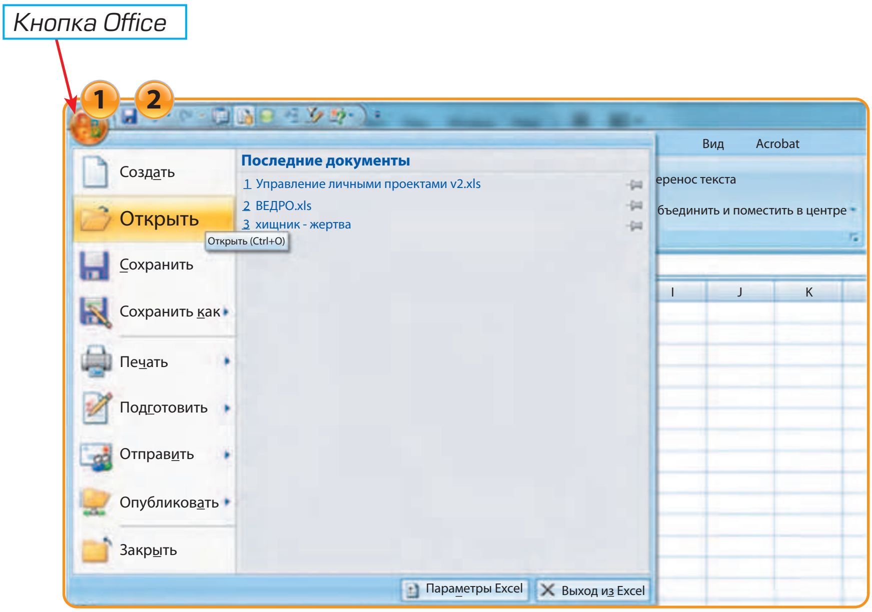
Запуск электронных таблиц (ЭТ) *Microsoft Excel 2007*

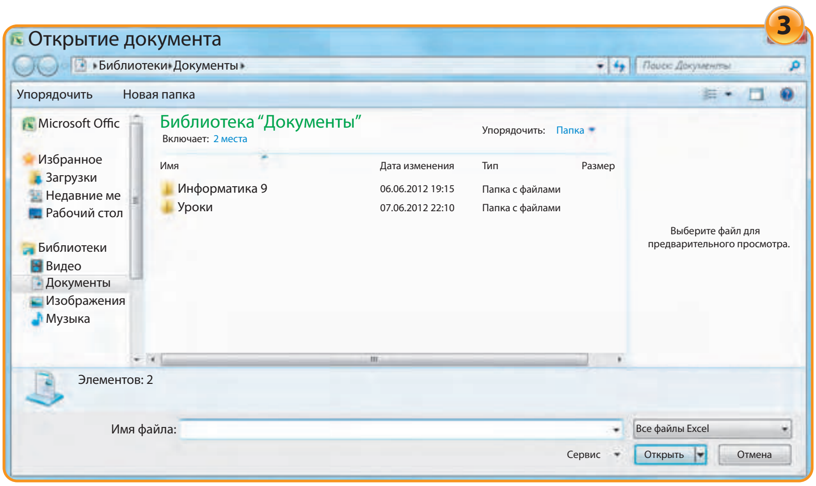
1. Нажать кнопку *Пуск*.
2. Вызвать меню *Все программы*.
3. Найти пункт *Microsoft Office*.
4. В выпавшем списке выбрать *Microsoft Office Excel 2007*.



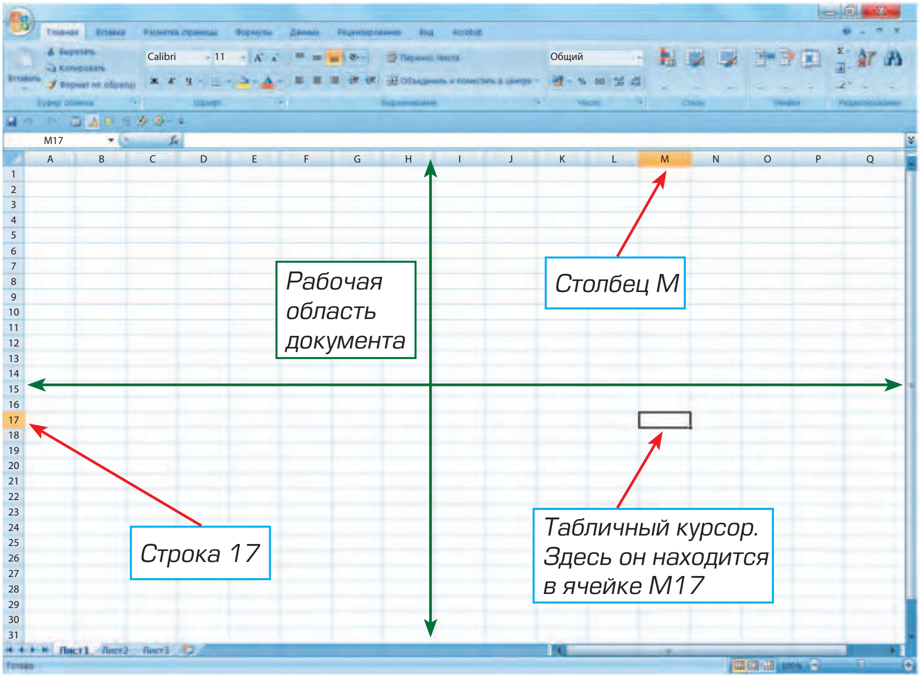
Открытие документа

1. Нажать кнопку *Office* (в окне программы вверху слева).
2. В выпавшем меню действий с документами выбрать команду *Открыть*.
3. В появившемся окне *Открытие документа* выбрать диск, папку и файл.



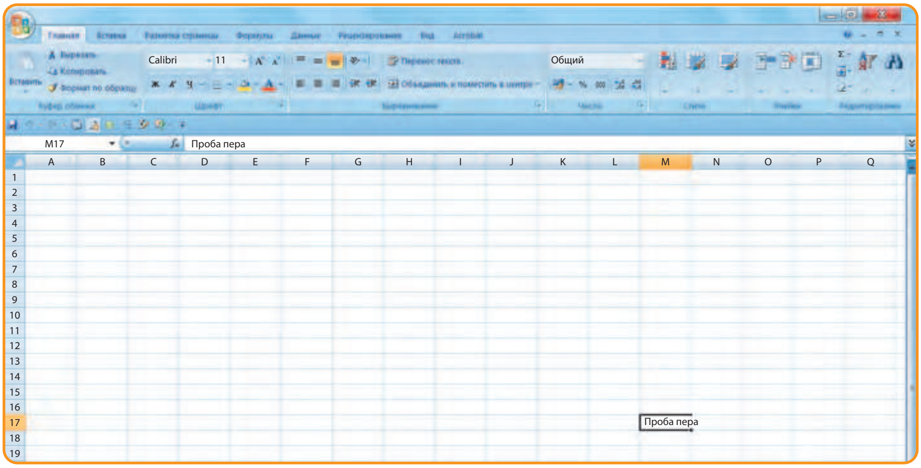


Окно документа



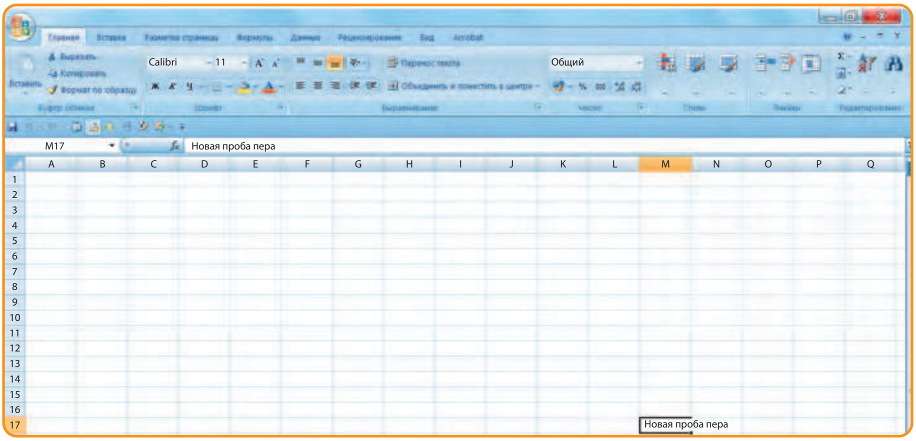
Ввод данных в ячейку

1. Выделить ячейку и набрать текст.
2. Нажать значок √ *Ввод* или клавишу Enter.



Правка (редактирование текста)

1. Дважды щёлкнуть в ячейке или выделить ячейку и нажать клавишу F2.
2. Отредактировать текст.
3. Нажать значок √ *Ввод* или клавишу Enter.



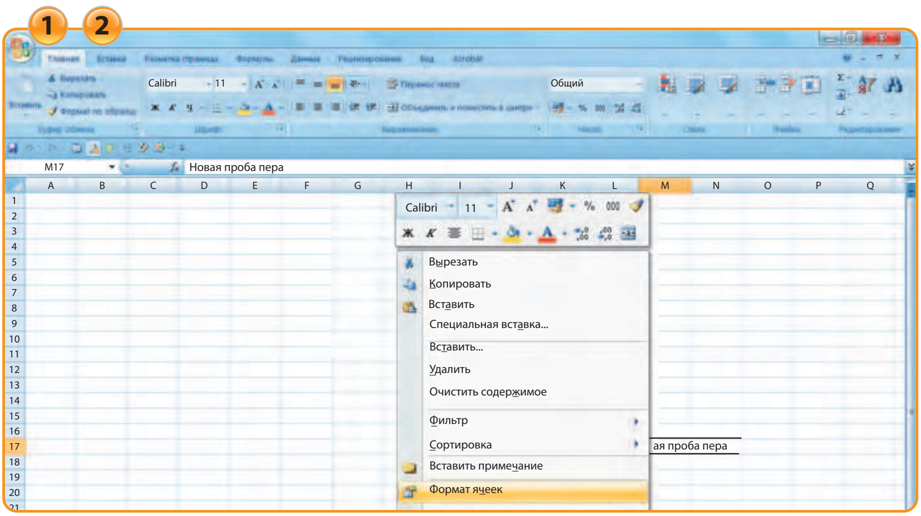
Форматирование введённого ранее текста

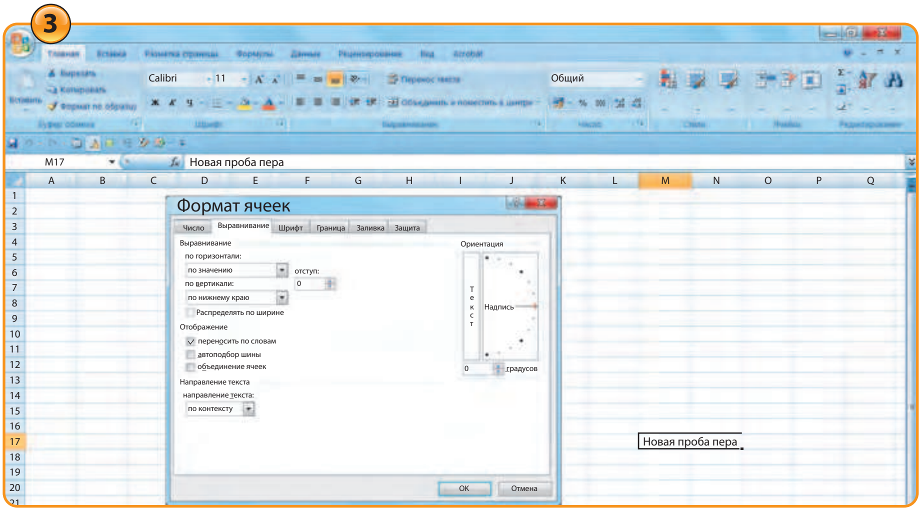
1. Выделить ячейку.

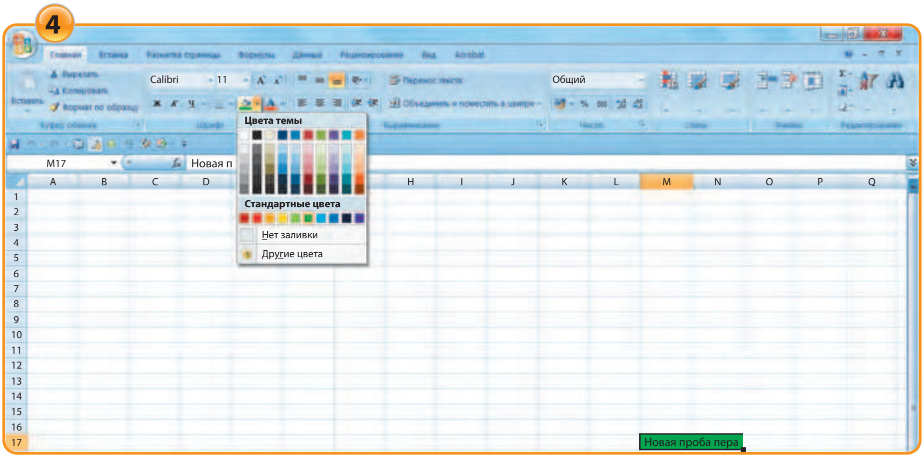
2. Щёлкнуть правой кнопкой мыши и в контекстном меню выбрать пункт *Формат ячеек.*

3. Чтобы текст не занимал соседние ячейки, в появившемся окне *Формат ячеек* установить флажок (поставить галочку) *Отображение – переносить по словам.*

4. Чтобы залить ячейку цветом, выделить ячейку и выбрать подходящий цвет из пункта *Заливка* вкладки *Главная*.







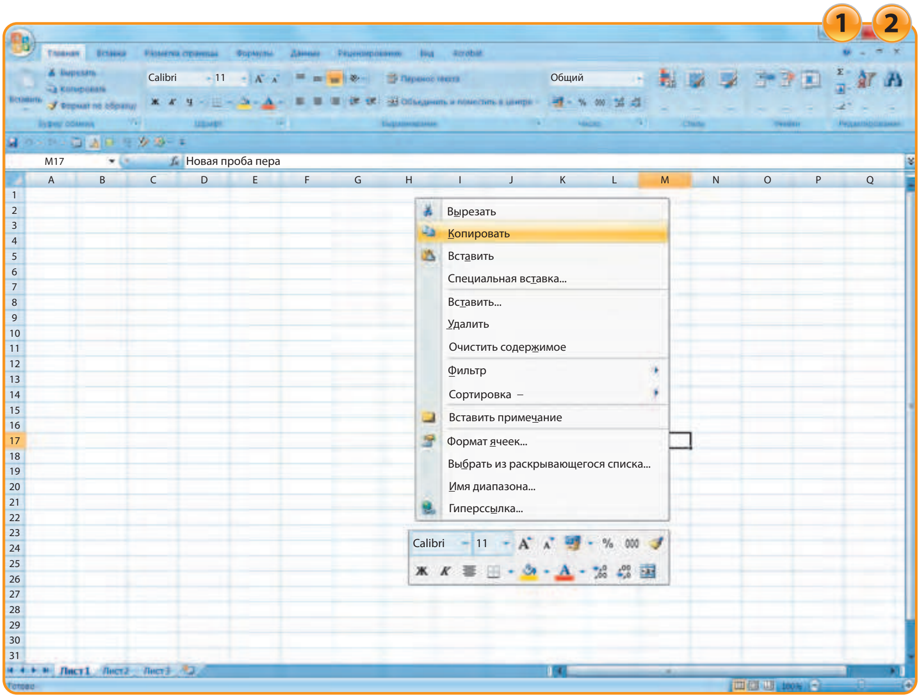
Копирование и вставка данных в ячейки

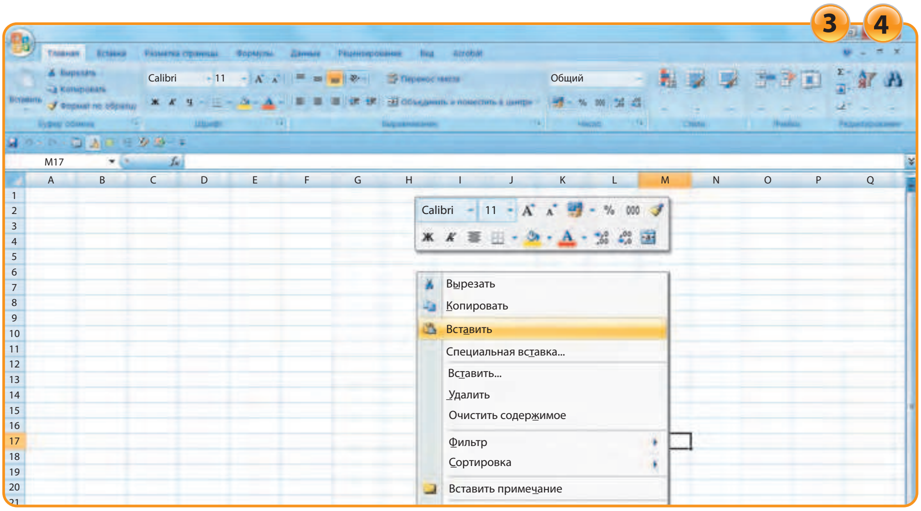
1. Выделить ячейку.

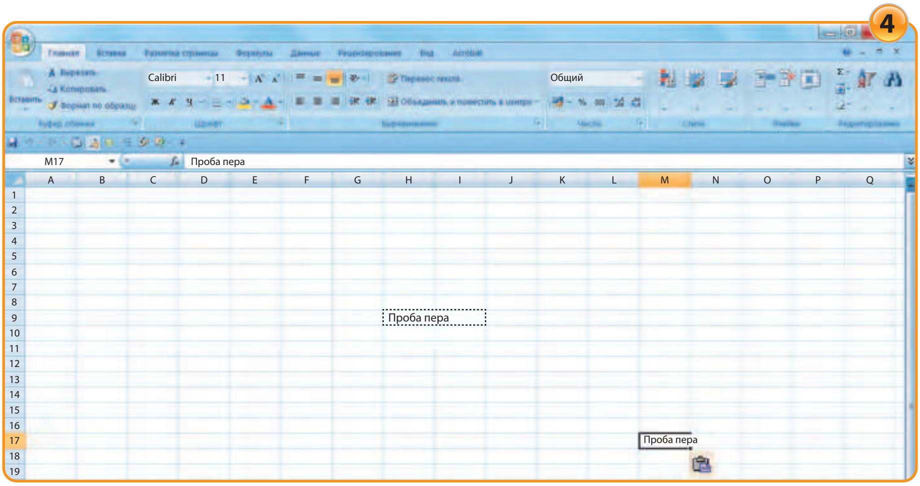
2. Щёлкнуть правой кнопкой мыши и в контекстном меню выбрать пункт *Копировать* или нажать комбинацию клавиш Ctrl+C.

3. Выделить ячейку назначения – куда надо скопировать данные.

4. Щёлкнуть правой кнопкой мыши и в контекстном меню выбрать пункт *Вставить* или нажать комбинацию клавиш Ctrl+V. Копия данных будет помещена в ячейку назначения. Будет скопировано также и форматирование исходной ячейки.


1
2
M17
Новая проба пера
Вырезать
Копировать
Вставить
Специальная вставка...
Вставить...
Удалить
Очистить содержимое
Фильтр
Сортировка
Вставить примечание
Формат ячеек...
Выбрать из раскрывающегося списка...
Имя диапазона...
Гиперссылка...
Calibri
11

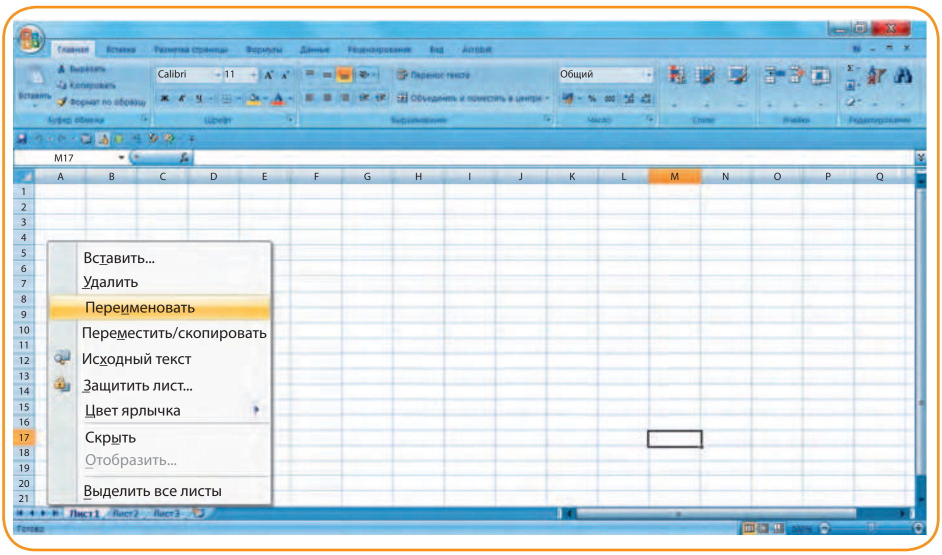

3
4
M17
Calibri
11
Вырезать
Копировать
Вставить
Специальная вставка...
Вставить...
Удалить
Очистить содержимое
Фильтр
Сортировка
Вставить примечание



Переименование рабочего листа

1. Щёлкнуть правой кнопкой мыши на ярлычке рабочего листа и выбрать пункт *Переименовать*.

2. Отредактировать имя рабочего листа и нажать клавишу Enter или щёлкнуть мышью на листе.



§ 2. Построение информационной модели. Численный эксперимент. Визуализация полученных данных

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ УРОКА

Как вам известно из курса истории, предприимчивые переселенцы эпохи Великих географических открытий стремились колонизовать бескрайние просторы открытых ими территорий Нового Света и Австралии. Полагая, что ресурсы новых земель безграничны, они завозили на них домашних животных и основывали фермерские хозяйства. Одновременно на новые территории попадали и «спутники цивилизации» – крысы.

Чем всё это закончилось, известно. Расплодившиеся на степных просторах кролики и козы полностью съели растительность на целых островах, а крысы уничтожили на них животный мир. Если бы не срочные меры, принятые правительствами новых территорий, последние могли бы превратиться в бесплодную пустыню.

• Какая проблема описана в этой ситуации? Сформулируйте вопрос, ответом на который будет решение этой проблемы. Сравните свой вариант с авторским (с. 285 учебника).

НЕОБХОДИМЫЕ БАЗОВЫЕ ЗНАНИЯ

Вспомните из курса математики:
что такое натуральные числа;
что такое арифметическая прогрессия;
что такое геометрическая прогрессия;
чем различаются эти прогрессии.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Прочитайте текст сообщения с новостной ленты BBC.

«Кролики съели остров

Остров Маккуори (Macquarie Island), находящийся под юрисдикцией штата Тасмания, Австралия, терпит экологическую катастрофу. Растительность острова с невообразимой скоростью пожирают кролики, которые расплодились, после того как в 2000 году на Маккуори были истреблены все кошки. Изменения островной флоры видны даже из космоса, сообщает BBC News. [...]

Власти решили спасти остров, полностью истребив кроликов, крыс и мышей. Для этого по всему Маккуори будет рассыпана отравленная приманка. Инициатива обойдётся австралийской казне в 17 млн долларов.

09:48 13.01.2009

Если мы будем рассматривать несчастный остров Маккуори как материальную модель непрерывных экологических бедствий в Австралии и Новой Зеландии, то мы заметим, что невольный эксперимент Австралийского правительства длился целых 9 лет. Он обошёлся казне, если даже не принимать во внимание экологический ущерб, в сумму не менее 17 млн долларов, потраченных на исправление ошибок.

Отсюда видно, что материальное моделирование не всегда приемлемо для исследования окружающего нас мира. Гораздо эффективнее в работе оказывается информационная модель. Попробуем создать её вместе.

Представим, что в пространстве с неограниченным запасом ресурсов оказывается пара кроликов. Для простоты будем считать, что пара кроликов приносит пару крольчат ежеквартально, причём спустя 3 месяца после рождения крольчата могут сами приносить потомство. Примем допущение, что кролики никогда не умирают.

Тогда каждый квартал (3 месяца) количество кроликов удваивается:

$$N_t = N_{t-1} + N_{t-1},$$

где: N_t – число животных в текущем квартале;

N_{t-1} – число животных в предыдущем квартале.

Мы получили **математическую модель**.

Чтобы понять, почему она такая, обратимся к таблице (рис. 2.1).

Квартал	Родители	Поколение				Всего кроликов
		1-е	2-е	3-е	4-е	
1	2					2
2	2	2				4
3	2	2+2	2			8
4	2	2+2+2	2+2+2	2		16
5	2	2+2+2+2	2+2+2+2+2+2	2+2+2+2	2	32
...	...	...	...	...	...	...

Рис. 2.1

В столбцы таблицы занесена численность различных поколений нашей кроличьей колонии. Родителей всегда двое (вы не забыли, что они бессмертны?). Численность 1-го поколения увеличивается на 2 к началу каждого следующего квартала (крольчиха приносит пару крольчат ежеквартально). Со вторым поколением дело обстоит сложнее: крольчата первого поколения сами начинают приносить потомство, достигнув трёхмесячного возраста, причём каждая пара приносит пару потомства.

В заданиях к параграфу вы будете испытывать построенную модель на компьютере. Проведение расчётов по математической модели на компьютере называют **численным экспериментом**.

Из правого столбца таблицы видно, что рост численности популяции в рамках нашей модели происходит лавинообразно и ничем не ограничен. Вы также сможете в этом убедиться при проведении численного эксперимента. Насколько это соответствует действительности?

Здравый смысл подсказывает, что в реальной жизни динамика роста популяции не может быть безгранична, она ограничена возможностями среды обитания. Для нас очевидно, что рано или поздно в игру вступают такие факторы, как ограниченность ресурсов среды обитания, ограниченный срок жизни обитателей популяции (возраст, болезни) и наличие хищников, оказывающих влияние на число обитателей. Исследования биологов подсказывают, что качественно кривая роста при ограниченных ресурсах (случай острова Маккуори) достигает предела и далее не возрастает (рис. 2.2).

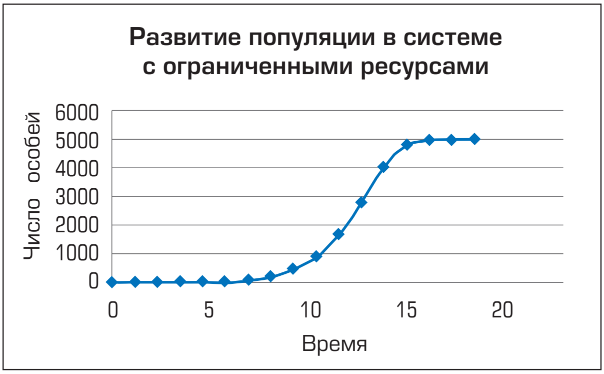


Рис. 2.2

Таким образом, наша простейшая модель неограниченного роста несовершенна и нуждается в уточнении.

ОБОБЩЕНИЕ НОВЫХ ЗНАНИЙ

Человек далеко не всегда может исследовать оригинальные процессы и явления, происходящие в окружающем мире. Чаще всего, в силу ограниченности времени и ресурсов, он вынужден создавать модели объектов исследования.

Создание материальных моделей объектов исследования нередко оказывается слишком дорогим и долгим удовольствием. В последнее время широкое распространение получили информационные модели и их частный случай – математические модели.

При создании математической модели исследуемое явление описывается на языке математики, а затем по полученному математическому описанию выполняются расчёты.

Результаты расчётов часто представляют для наглядности в виде графиков и сравнивают с реальным явлением или процессом.

ПРИМЕНЕНИЕ ЗНАНИЙ

1. Требуется зафиксировать найденную закономерность роста популяции кроликов в информационной модели.

Для этого сначала откройте сохранённый на предыдущем занятии документ и перейдите на новый лист. Назовите его «Моделирование популяции», на нём вы будете строить конкретную модель развития популяции кроликов.

Квартал	Число кроликов
1	2
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

Для начала создайте на новом, пока ещё пустом листе шапку будущей таблицы и заполните значениями левый столбец.

Далее занесите в ячейку начальную численность популяции. Это может быть любое чётное натуральное число, не меньшее 2, потом вы его сможете изменить.

Теперь занесите в ячейку, соответствующую второму кварталу, формулу, соответствующую математической модели расчёта численности популяции $N_t = N_{t-1} + N_{t-1}$. В электронных таблицах вместо N_{t-1} нужно записать адрес ячейки с данными, формула примет вид, например, =B2+B2. Скопируйте её на оставшиеся ячейки с данными для кварталов 3–15. Программа электронных таблиц тут же рассчитает значения численности популяции.

Почему формула, справедливая для первого квартала, оказалась пригодной для других ячеек диапазона? Проверьте несколько ячеек с формулами для кварталов 2–14 и убедитесь в том, что ссылки на ячейки (адреса ячеек) в формулах изменились. Изменяющиеся при копировании адреса называются **относительными**. При копировании эти адреса меняются в соответствии со смещением формулы-копии по отношению к формуле-оригиналу. В данном случае слагаемые в формуле будут являться ссылками на ячейку – «соседку сверху».

Попробуйте изменить начальное значение численности в верхней строке таблицы. ЭТ немедленно пересчитает значения для других моментов времени.

Установите начальную численность равной 20 и сверьте свой результат с приведённым ниже.

Квартал	Число кроликов
1	20
2	40
3	80
4	160
5	320
6	640
7	1280
8	2560
9	5120
10	10240
11	20480
12	40960
13	81920
14	163840
15	327680

Если результаты расходятся, проверьте расчётную формулу. Если не получается найти и исправить ошибку, обратитесь к учителю.

2. Чтобы представить наглядно темпы роста колонии кроликов, постройте график роста популяции кроликов от времени. Для этого воспользуйтесь возможностями ЭТ по созданию диаграмм.

Постройте точечную диаграмму по полученным результатам расчётов.

Сохраните документ.

3. Как называется полученная последовательность численности модельной популяции?

Квартал	Число кроликов	Отношение числа кроликов в текущем квартале к их числу в предыдущем квартале
1	20	
2	40	
3	80	
4	160	
5	320	
6	640	
7	1280	
8	2560	
9	5120	
10	10240	
11	20480	
12	40960	
13	81920	
14	163840	
15	327680	

Указание. Рассчитайте отношение двух последовательных значений численности популяции для различных моментов времени и сравните их. Если вопрос останется непонятным, вернитесь к разделу «НЕОБХОДИМЫЕ БАЗОВЫЕ ЗНАНИЯ» этого параграфа.

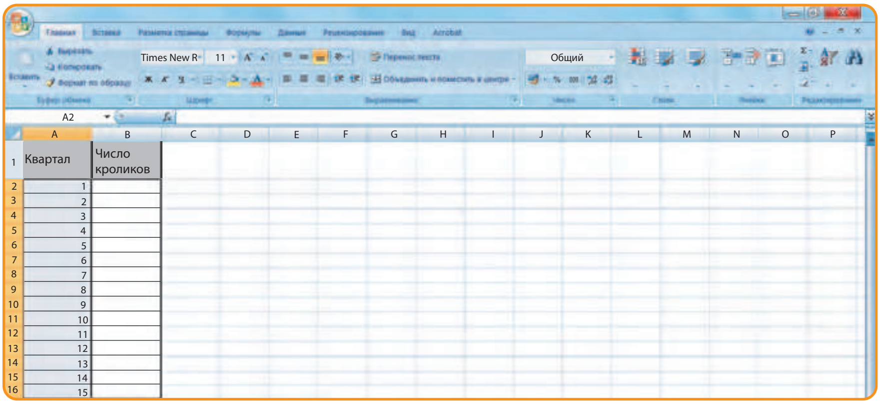
ОПЕРАЦИИ

Быстрое заполнение значениями диапазона ячеек

1. Занести в первую ячейку диапазона начальное значение (для примера, разобранного в параграфе, это 1).

2. Выделить ячейку и подвести курсор к её правому нижнему углу. Курсор превратится в маленький крестик.

3. Нажать правую кнопку мыши и, удерживая её, протащить курсор до последней ячейки диапазона. В появившемся меню выбрать пункт *Заполнить*. Получится последовательность целых чисел от 1 до 15 с шагом 1 (арифметическая прогрессия).



Синтаксис формул электронных таблиц

Формулы в ЭТ всегда начинаются со знака равенства (=). Начальный знак равенства позволяет ЭТ отличить формулу от простого текста.

В отличие от простого текста, в ячейке по умолчанию высвечивается не сама формула, а вычисленное по ней значение.

В формулах используются числа, ссылки на ячейки (адреса ячеек) и значения функций, связанные знаками арифметических и логических операций.

Основные арифметические операции выполнятся в порядке, указанном в таблице. Если порядок выполнения нескольких операций одинаков, то операции выполняются слева направо. Операции в круглых скобках ( ) выполняются в первую очередь.

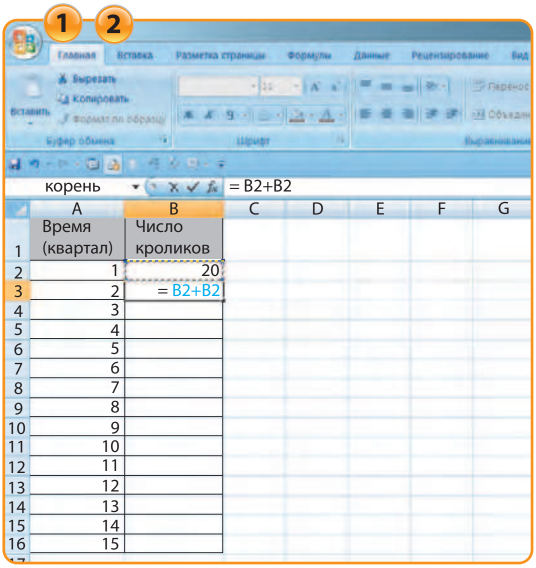
Обозначение	Смысл	Порядок выполнения
()	Круглые скобки	0
^	Возведение в степень	1
*	Умножение	2
/	Деление	2
+	Сложение	3
–	Вычитание	3

Ввод формулы

1. Занести в ячейку знак =, он всегда стоит в начале формулы.

2. Продолжить набор формулы. Ссылку на ячейку (в нашем примере B2) можно просто ввести, как текст. Но проще во время ввода формулы щёлкнуть в ячейке, на которую нужно сослаться, и ЭТ автоматически подставит её имя в формулу.

3. По окончании ввода нажать значок √ *Ввод* или клавишу Enter.

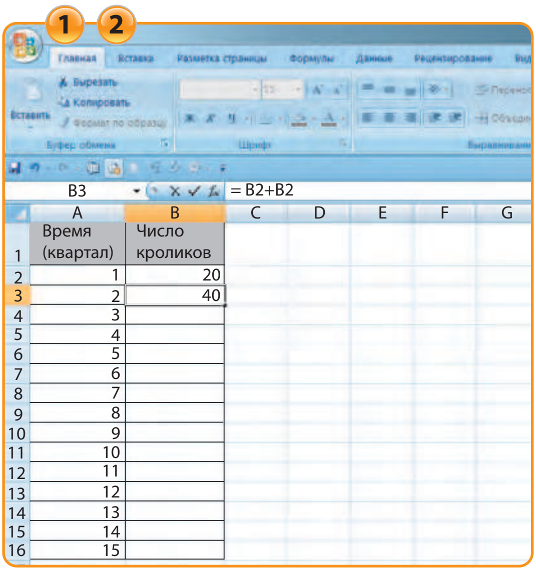


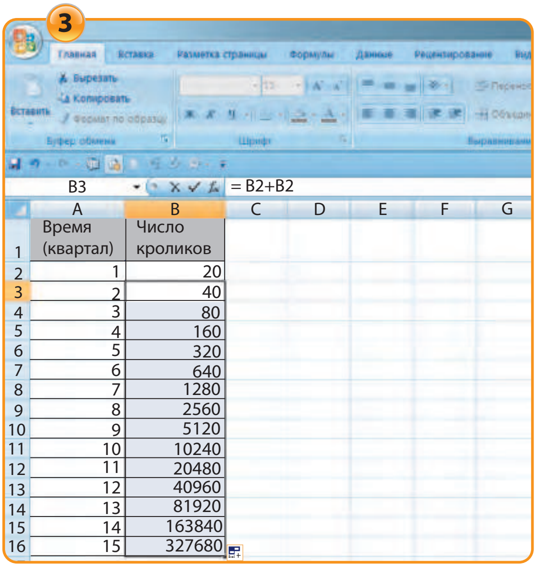
Копирование формулы на диапазон ячеек

1. Выделить ячейку с формулой, подлежащей копированию.

2. Подвести курсор к её правому нижнему углу. Курсор превратится в маленький крестик.

3. Нажать левую кнопку мыши и, удерживая её, протащить курсор до последней ячейки диапазона. Диапазон ячеек заполнится формулами. В ячейках по умолчанию отображаются значения – результаты вычислений по формулам.

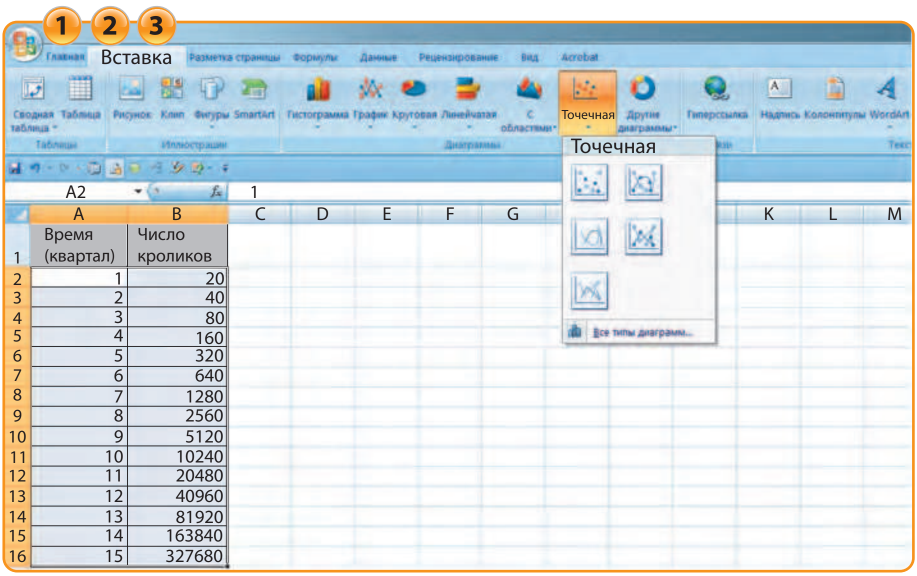




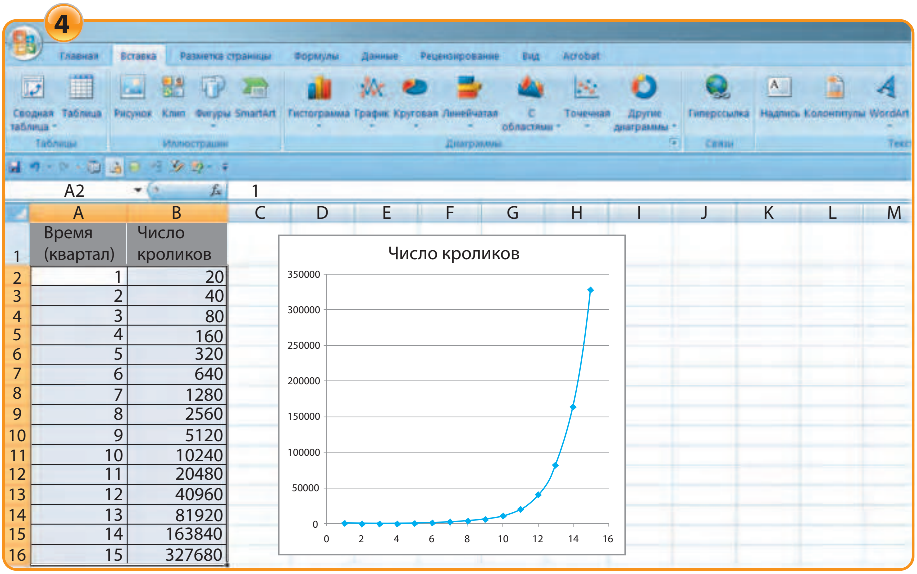
	A	B
1	Время (квартал)	Число кроликов
2	1	20
3	2	40
4	3	80
5	4	160
6	5	320
7	6	640
8	7	1280
9	8	2560
10	9	5120
11	10	10240
12	11	20480
13	12	40960
14	13	81920
15	14	163840
16	15	327680

Построение точечной диаграммы по результатам расчётов

1. Выделить диапазон ячеек с данными для построения диаграммы.
2. Выбрать вкладку *Вставка*.
3. Выбрать для вставки точечную диаграмму с гладкими кривыми и маркерами значений.
4. Перетащить диаграмму в удобное место на листе и отформатировать её.



	A	B
1	Время (квартал)	Число кроликов
2	1	20
3	2	40
4	3	80
5	4	160
6	5	320
7	6	640
8	7	1280
9	8	2560
10	9	5120
11	10	10240
12	11	20480
13	12	40960
14	13	81920
15	14	163840
16	15	327680


4
Главная
Вставка
Разметка страницы
Формулы
Данные
Рецензирование
Вид
Acrobat
A2
1
Время (квартал)
Число кроликов
1 20
2 40
3 80
4 160
5 320
6 640
7 1280
8 2560
9 5120
10 10240
11 20480
12 40960
13 81920
14 163840
15 327680
Число кроликов
350000
300000
250000
200000
150000
100000
50000
0
0 2 4 6 8 10 12 14 16

§ 3. Исследование модели

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ УРОКА

Томас Мальтус (1766–1834)

На рубеже XVIII–XIX веков вышла книга английского учёного Томаса Мальтуса «Очерк о законе народонаселения». Книга имела в то время громкий успех и широко обсуждалась в научных кругах.

Мальтус считал, что население Земли растёт в геометрической прогрессии, а продовольственные ресурсы для жизни – в арифметической (рис. 2.3). Следовательно, рост населения должен неизбежно обогнать пищевую базу, и человечество ожидает голодная смерть.

Самый эффективный способ борьбы с голодом, по Мальтусу, – войны и эпидемии, способные затормозить рост народонаселения.

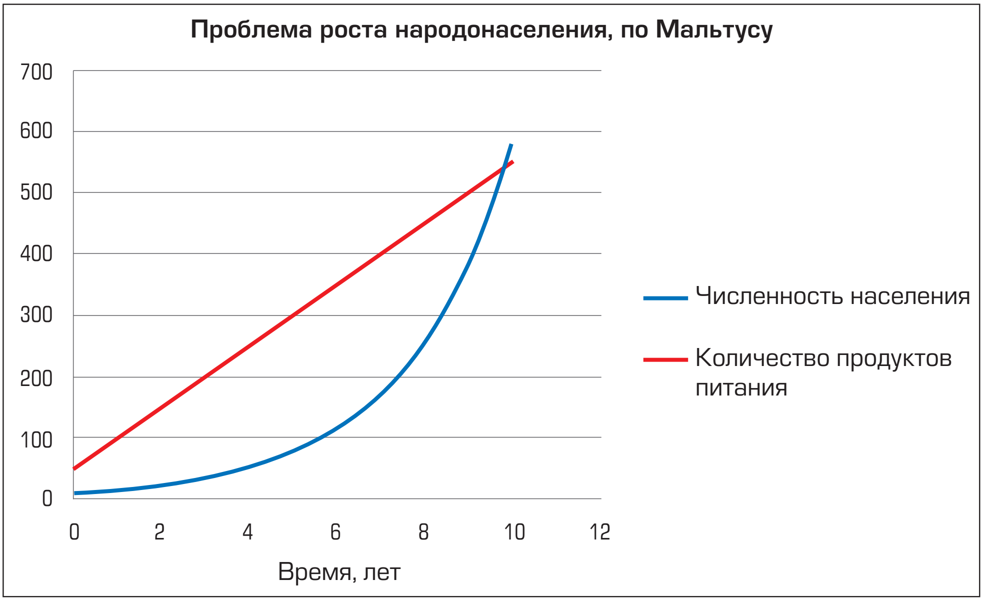


Рис. 2.3

Что и говорить, безрадостное будущее предсказывал Мальтус человечеству. С тех пор население Великобритании увеличилось с 10 млн человек до 50 млн и голодная смерть британцам, похоже, всё ещё не грозит.

• Какую проблему видел Мальтус? Согласны ли вы с ним? Как бы вы сформулировали основные вопросы урока? Сравните свой вариант с авторским (с. 285 учебника).

НЕОБХОДИМЫЕ БАЗОВЫЕ ЗНАНИЯ

Вспомните из курса математики:

что такое геометрическая прогрессия; каковы её свойства.

Вспомните из курса информатики для 7-го и 8-го классов, что такое цикл. Посмотрите также в словаре значение слов «цикл», «циклический».

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Предвосхищение основания (*лат.* petitio principii) – логическая ошибка в доказательстве, заключающаяся в том, что в качестве аргумента (основания), обосновывающего тезис, приводится положение, которое хотя и не является заведомо ложным, однако нуждается в доказательстве. Так, социологическое учение английского экономиста и священника Т. Мальтуса опиралось на два основных аргумента: население растёт в геометрической прогрессии, в то время как средства к существованию возрастают лишь в арифметической прогрессии. Оба эти аргумента были недоказанными, поэтому Мальтус совершил ошибку предвосхищения основания. Ошибка стала явной, когда было доказано, что население растёт гораздо медленнее, чем предполагал Мальтус, а объём средств к существованию, напротив, возрастает намного быстрее.

Словарь терминов логики. – М., 2000 г.

Работа по созданию модели и её исследование практически никогда не заканчиваются после создания первого варианта модели (что сделал Мальтус) и её испытания (на что у него не хватило жизни). Неоценимая заслуга Мальтуса состоит в том, что он привлёк внимание учёных к проблеме роста населения Земли, и начатое им дело продолжили его многочисленные оппоненты.

Окружающий нас мир неизмеримо богаче, чем любая модель, и мы можем только приблизиться к действительности в процессе моделирования ценой упорного труда.

Как правило, в работе с моделями выделяют три этапа:

1. *Моделирование.* Для создания модели объекта, явления или процесса нужно отбросить второстепенное и постараться выделить существенные черты и свойства объекта, который вы изучаете. Для уточнения представления проводятся дополнительные исследования и эксперименты (иногда мысленные, но если это возможно, экспериментируют с реальным объектом моделирования). Далее изготавливают материальную модель или переходят

к описанию объекта на некотором языке, чаще всего на языке математики, то есть строят информационную (математическую) модель.

2. *Модельный эксперимент*. Полученную модель испытывают. В случае математической модели эксперимент называют численным и проводят расчёты на компьютере.

3. *Выдвижение гипотез*. Полученные результаты сравнивают с оригинальным объектом моделирования и, если они не соответствуют поведению объекта, возвращаются к пункту 1. Чтобы усовершенствовать модель в процессе её исследования, выдвигают гипотезы о причинах несоответствия оригиналу. Гипотеза (по-гречески означает предположение) — недоказанное утверждение, предположение или догадка. Как правило, гипотезы высказывают на основе наблюдений за реальным процессом или явлением, и поэтому они должны выглядеть правдоподобно. На основе гипотез модель изменяют и повторяют модельный эксперимент.

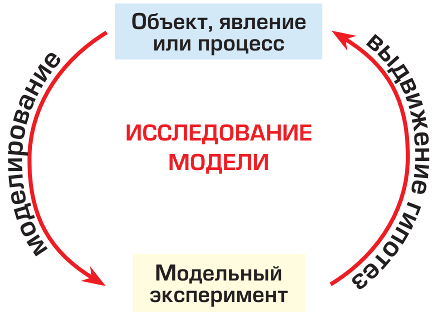


Рис. 2.4

Циклический процесс исследования модели (рис. 2.4) продолжают до тех пор, пока не будет достигнуто удовлетворительное соответствие поведению оригинала.

ОБОБЩЕНИЕ НОВЫХ ЗНАНИЙ

Чтобы получить модель, необходимо выделить самые существенные свойства исследуемого объекта, явления или процесса. Далее их переносят в модель, материальную или информационную. В случае информационной модели эти свойства описывают на каком-либо формальном языке, например математическом. Этот этап называется моделированием.

Далее, на этапе модельного эксперимента, модель испытывают. В случае математической модели эксперимент называют численным и проводят на компьютере.

Результаты эксперимента сравнивают с оригинальным объектом, явлением или процессом. Если удовлетворительного совпадения поведения модели и оригинала не получено, выдвигают гипотезы о причинах несоответствия и возвращаются к этапу моделирования.

Этот циклический процесс и называется исследованием модели.

ПРИМЕНЕНИЕ ЗНАНИЙ

1. Откройте в ЭТ документ, сохранённый на предыдущем занятии, и перейдите на лист «Моделирование популяции». Поставьте себе задачу учесть то обстоятельство, что кролик в реальных условиях (хищники, болезни) живёт примерно один год. Таким образом, будет выдвинута гипотеза о том, что причиной несоответствия модели реальности является допущение о неограниченном сроке жизни членов популяции.

Следовательно, в 5-м квартале (то есть по прошествии четырёх кварталов, с 1-го по 4-й, — одного года) вам придётся распрощаться с двумя кроликами — родоначальниками популяции.

Разграфите ещё один столбец справа и озаглавьте его «Число кроликов с учётом смертности». Начальное значение и формулы для кварталов 2–4 не изменятся, их можно просто скопировать из столбца слева.

Формулу для 5-го квартала отредактируйте, придав ей следующий вид:

$= N_4 + N_4 - N_1$,

где: N_4 — число животных в 4-м квартале;

N_1 — число животных в 1-м квартале.

Тем самым численность популяции, начиная с 5-го квартала, уменьшается за счёт животных, проживших один год.

Вам остаётся только скопировать новую формулу для 5-го квартала на диапазон, соответствующий кварталам 6–15.

- Сравните численность животных в левой и правой колонках. Попробуйте объяснить разницу в расчётных значениях.

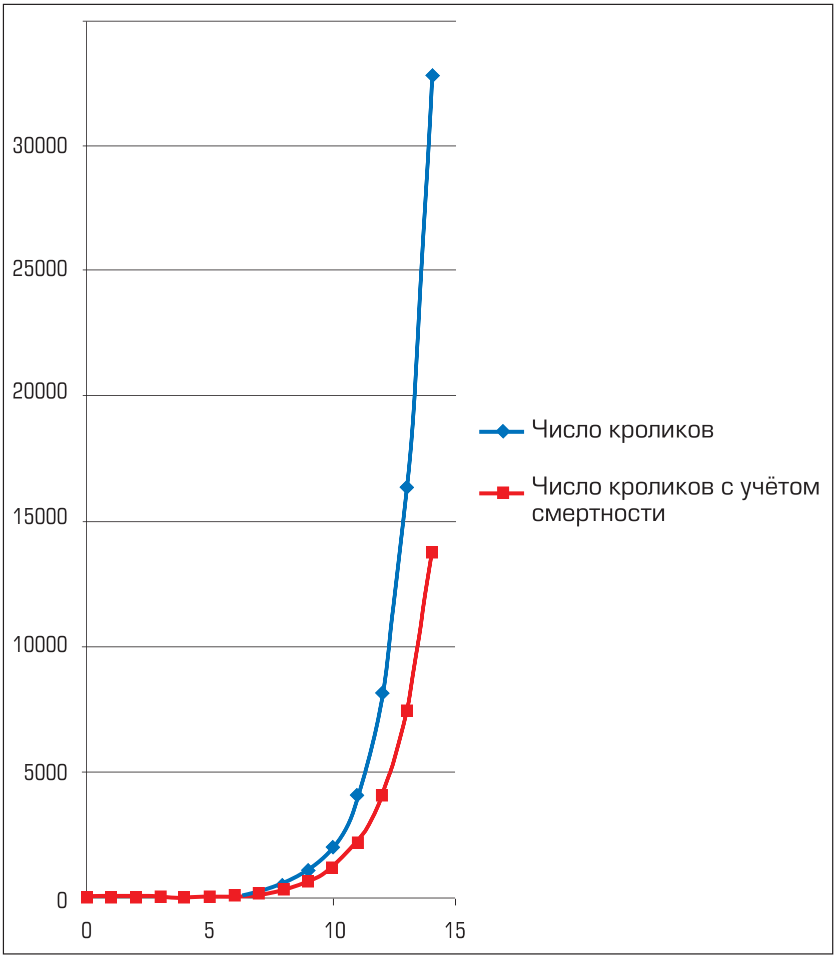
Если ваши расчёты не совпадают с приведённой ниже справочной таблицей, попросите учителя помочь вам найти причину ошибки.

Квартал	**Число кроликов**	**Число кроликов с учётом смертности**
1	20	20
2	40	40
3	80	80
4	160	160
...	...	...
14	163840	74720
15	327680	137440

2. Теперь представьте ваши вычисления в наглядном виде. Для этого воспользуйтесь уже знакомыми вам возможностями ЭТ *Microsoft Excel* по созданию диаграмм.

Что изменилось в вашей модели? Стала ли она ближе к реальности?

Из диаграммы видно, что неудержимый рост популяции не сдерживает даже ограничение срока жизни кролика до одного года. Более того, возникает подозрение, что характер роста численности популяции по-прежнему описывается геометрической прогрессией.



Так ли это? Проверим.

3. Разграфите ещё один столбец справа, подпишите его «Отношение числа кроликов в текущем квартале к их числу в предыдущем квартале» и рассчитайте это отношение для числа животных с учётом смертности.

- Каково ваше экспертное заключение о характере зависимости? Как она называется? Будет ли число наших подопечных неограниченно расти, невзирая на потери от хищников и болезней?

Указание. Если вопросы остаются непонятными, вернитесь к заданию 3 предыдущего параграфа и разделу «НЕОБХОДИМЫЕ БАЗОВЫЕ ЗНАНИЯ» этого параграфа.

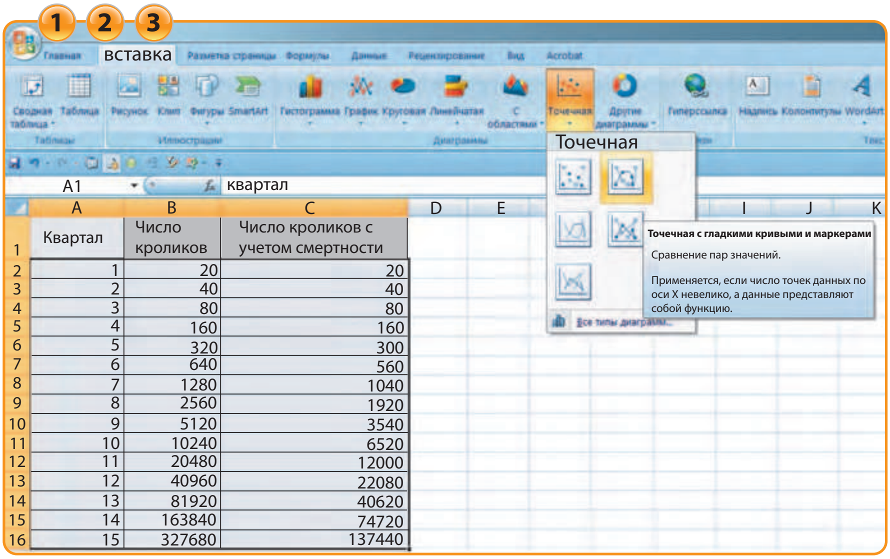
Квартал	**Число кроликов**	**Число кроликов с учётом смертности**	**Отношение числа кроликов в текущем квартале к их числу в предыдущем квартале**
1	20	20	
2	40	40	
3	80	80	
4	160	140	
...	...	...	...
14	163 840	74 720	
15	327 680	137 440	

Не забудьте сохранить рабочий документ. Он ещё пригодится вам в будущем.

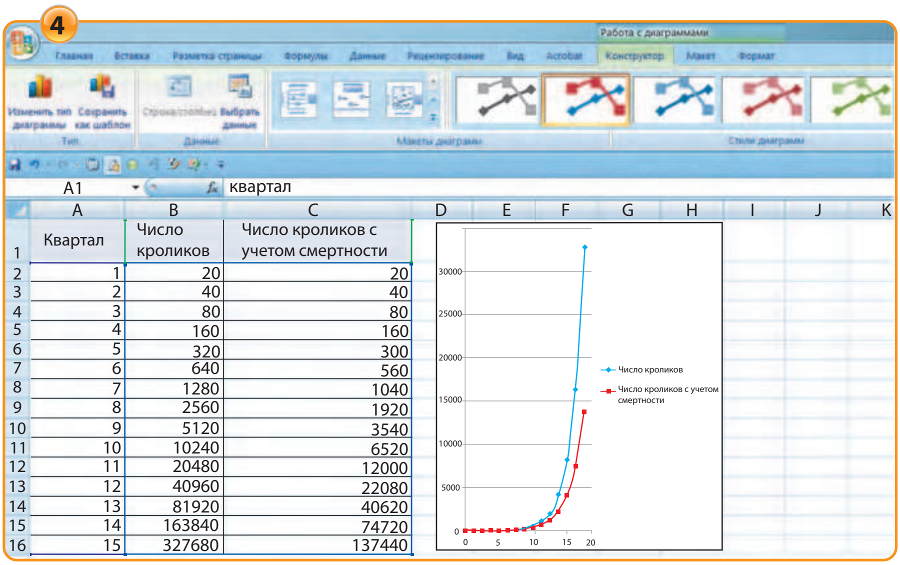
ОПЕРАЦИИ

Построение точечной диаграммы по нескольким сериям данных

1. Выделить диапазон ячеек с данными для построения диаграммы.
2. Выбрать вкладку *Вставка*.
3. Выбрать для вставки точечную диаграмму с гладкими кривыми и маркерами значений.
4. Перетащить диаграмму в удобное место на листе и отформатировать её.



Квартал	Число кроликов	Число кроликов с учетом смертности
1	20	20
2	40	40
3	80	80
4	160	160
5	320	300
6	640	560
7	1280	1040
8	2560	1920
9	5120	3540
10	10240	6520
11	20480	12000
12	40960	22080
13	81920	40620
14	163840	74720
15	327680	137440



§ 4. Совершенствование модели

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ УРОКА

Прочитайте цитату из повести А. и Б. Стругацких «Понедельник начинается в субботу»:

«Этот Выбегалло заявлял, что все беды, эта, от неудовольствия проистекают, и ежели, значить, дать человеку всё – хлебца, значить, отрубей пареных, – то и будет не человек, а ангел. Нехитрую эту идею он пробивал всячески, размахивая томами классиков, из которых с неописуемым простодушием выдирал с кровью цитаты, опуская и вымарывая всё, что ему не подходило.

В своё время учёный совет дрогнул под натиском этой неудержимой, какой-то даже первобытной демагогии, и тема Выбегаллы была включена в план. Действуя строго по этому плану, старательно измеряя свои достижения в процентах выполнения и никогда не забывая о режиме экономии, увеличении оборачиваемости оборотных средств, а также о связи с жизнью, Выбегалло заложил три экспериментальные модели: модель человека, неудовлетворённого полностью, модель человека, неудовлетворённого желудочно, модель человека, полностью удовлетворённого».

Прочитайте в главе 4 повести Стругацких (текст повести вы можете найти в Интернете) о трагикомическом конце творения доктора наук Выбегалло – модели человека, неудовлетворённого желудочно.

- Как вы считаете, почему модель Выбегалло погибла? О чём также забыл, поддавшись натиску Выбегалло, учёный совет? Сформулируйте основной вопрос урока. Сравните свой вариант с авторским (с. 285 учебника).

НЕОБХОДИМЫЕ БАЗОВЫЕ ЗНАНИЯ

Уметь вводить и редактировать формулы в ячейки ЭТ и копировать их в другие ячейки. (§ 2 и учебник для 8-го класса, книга 1, модуль «Принятие решения».)

Строить по результатам расчёта точечную диаграмму и форматировать её. (§ 3 и учебник для 8-го класса, книга 1, модуль «Принятие решения».)

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Попытка усовершенствовать нашу модель роста популяции оказалась неудачной. Мы выдвинули гипотезу, что причиной несоответствия модели реальности было допущение о неограниченном сроке жизни членов популяции. Но расчёты по усовершенствованной модели показали, что экспериментальная популяция в зависимости от заданного темпа прироста продолжает неограниченный рост в геометрической прогрессии и в конечном счете погибает, как модель профессора Выбегалло.

Вместе с тем реальная популяция, как правило, живёт в равновесии с окружающей её средой.

Не будем унывать и попытаемся понять, в чём здесь дело.

Сходство странной модели псевдоучёного Выбегалло и наших моделей роста популяции состоит в том, что все эти модели *не имеют обратных связей*, то есть никак не реагируют на изменения собственного состояния и состояния окружающей среды. «Кадавр, неудовлетворённый желудочно», непрерывно ест, повинуясь только программе своего модельного существования. Наши воображаемые кролики ежеквартально размножаются, «не обращая внимания» на количество пищи на своём острове.

Для природных реальных процессов характерно как раз обратное — наличие отрицательных обратных связей, способствующих стабилизации состояния процессов.

Рассмотрим несколько примеров. Если усиливается ветер и на море зарождается шторм, то начинает работать сила трения, переводящая энергию волн в тепло, и шторм не достигает силы цунами.

То же самое характерно для экономических и социальных процессов: резкий рост спроса на товары влечёт немедленный рост цен на них и рост спроса замедляется. Одновременно рост цен стимулирует рост производства, удовлетворяющего спрос.

Если отрицательные обратные связи в силу каких-то причин отсутствуют или меняют свой знак, «разгоняя» процесс, вместо того чтобы тормозить его, возникают катастрофические явления — природные и социальные катаклизмы.

Выдвинем гипотезу о том, что если прирост численности популяции сделать зависимым от её численности так, что при некотором значении численности рост популяции останавливается (то есть ввести отрицательную обратную связь в нашу модель развития популяции), то поведение нашей модели будет ближе к реальности.

Нам не удалось найти в Интернете прямых данных о площади земли, достаточной для питания одного кролика. Тем не менее известно, что 10 кроликов съедают столько же корма, как одна овца (проверьте самостоятельно, так ли это), а овца может прокормиться с 1,5 гектара степи (*Э. Шиптон*. В стране бурь. — М. : Мир, 1967). Пусть размеры нашего воображаемого острова 15×1 км, тогда его площадь — 1500 гектаров. Тогда на острове смогут прокормиться максимум $1500/1{,}5 \cdot 10 = 10\,000$ кроликов.

Попытаемся теперь учесть в нашей математической модели тот факт, что при достижении популяцией численности в 10 000 особей её дальнейший рост должен остановиться, так как новым членам популяции просто не достанется пищи, и они погибнут.

Запишем нашу новую гипотезу на языке математики:

$$N_t = N_{t-1} + N_{t-1} \cdot (1 - N_{t-1}/10\,000),$$

где: N_t – число животных в текущем квартале;

N_{t-1} – число животных в предыдущем квартале.

Из формулы видно, что когда число кроликов N_t значительно меньше предельного значения 10 000, значение в скобках близко к единице и формула практически переходит в формулу роста в геометрической прогрессии:

$$N_t = N_{t-1} + N_{t-1} = 2 \cdot N_{t-1}.$$

Если же число кроликов N_t приближается к 10 000, значение в скобках близко к нулю и наша формула приобретает вид:

$$N_t = N_{t-1} + 0 \cdot N_{t-1} = N_{t-1}.$$

Таким образом, рост численности популяции по мере приближения к 10 000 должен замедлиться и совсем остановиться по достижении численностью максимального значения.

Теперь вспомним кривую роста популяции в системе с ограниченными ресурсами (см. § 2, рис. 2.2) и перейдём к численному эксперименту для проверки нашей гипотезы. Численный эксперимент вы сможете провести, выполняя задания к параграфу.

В результате вы получите точечные диаграммы численности популяций неограниченного роста, роста с учётом смертности и роста с учётом ограниченных ресурсов (рис. 2.5).

Кривая, отражающая рост популяции с учётом ограниченности ресурсов, называется S-образной или логистической (название кривой не имеет отношения к логистике – науке об управлении материальными ресурсами). Такое название дал ей бельгийский математик *Пьер Ферхю́льст*, занимавшийся в XIX веке исследованием проблемы народонаселения вслед за Томасом Мальтусом.

Интересно, что в 1830-х годах он предсказал верхнюю границу населения Бельгии, равную 9 400 000 человек.

В настоящее время население Бельгии составляет немногим больше 10 млн, что говорит о хорошей точности модели Ферхюльста.

Пьер Франсуа Ферхюльст (1804–1849)

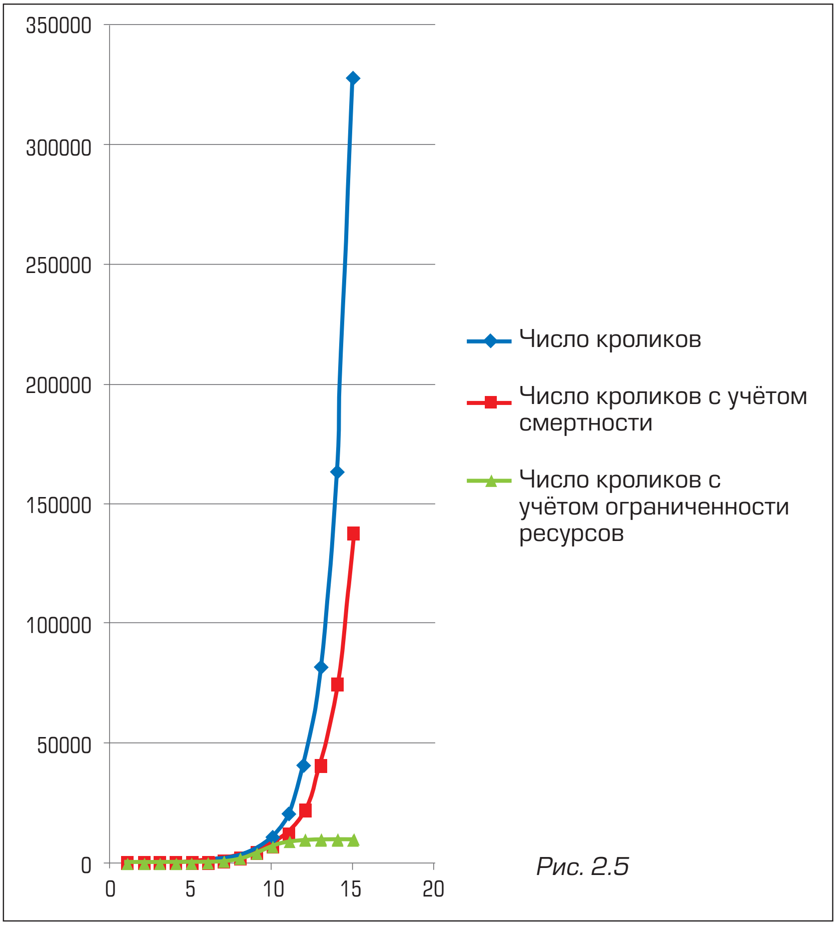


Рис. 2.5

ОБОБЩЕНИЕ НОВЫХ ЗНАНИЙ

Далеко не всегда исследователи сразу получают при математическом моделировании хорошее совпадение поведения математической модели и оригинала. Часто приходится искать причины несоответствия, выдвигать на этот счёт разнообразные гипотезы, корректировать модель, повторять численный эксперимент и сравнивать его результаты с оригиналом.

Большую часть гипотез при этом приходится отвергать, но некоторые из них после доработки ложатся в основу окончательной модели явления или процесса.

При проведении численного эксперимента в работе с математической моделью широко используется компьютер и специальное программное обеспечение, в том числе электронные таблицы.

ПРИМЕНЕНИЕ ЗНАНИЙ

1. Откройте в ЭТ документ, сохранённый на предыдущем занятии, и перейдите на лист «Моделирование популяции». Добавьте в таблицу значений численности популяции ещё один столбец.

Озаглавьте его «Число кроликов с учётом ограниченности ресурсов».

Занесите в ячейку, соответствующую 1-му кварталу, такое же начальное значение численности популяции, какое вы использовали на предыдущих занятиях.

В ячейку для 2-го квартала занесите формулу, соответствующую математической модели:

$N_1 + N_1 \cdot (1 - N_1 / 10\,000)$,

где N_1 – начальное число животных;

10 000 – максимальное число животных, способных прокормиться на территории по нашим расчётам.

Скопируйте расчётную формулу на диапазон ячеек для кварталов 3–15 и сравните ваш результат с приведённым ниже.

Квартал	**Число кроликов**	**Число кроликов с учётом смертности**	**Число кроликов с учётом ограниченности ресурсов**
1	20	20	20
2	40	40	40
3	80	80	80
4	160	160	159
...	...	...	...
13	81 920	40 620	9 995
14	163 840	74 720	10 000
15	327 680	137 440	10 000

Если результаты ваших расчётов в правом столбце отличаются от образца, проверьте начальное значение и расчётные формулы. Если с проблемой не удаётся справиться самостоятельно, попросите учителя вам помочь.

2. Постройте по результатам расчётов численности популяций неограниченного роста, роста с учётом смертности и роста с учётом смертности и ограниченных ресурсов точечные диаграммы для кварталов 1–15.

§ 5. Математические и статистические вычисления в процессе моделирования

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ УРОКА

Выполняя численные эксперименты, инженеры-конструкторы и учёные сталкиваются с необходимостью автоматически подсчитывать различные математические характеристики для полученных в ходе расчётов наборов данных. Чаще всего это сумма, среднее арифметическое, максимум или минимум для набора числовых данных.

Программы для подобных вычислений входят в любой курс программирования.

• Как вы думаете, должен ли исследователь, вооружённый электронными таблицами, уметь программировать самостоятельно? Сформулируйте основной вопрос урока. Сравните свой вариант с авторским (с. 285 учебника).

НЕОБХОДИМЫЕ БАЗОВЫЕ ЗНАНИЯ

Вспомните из курса математики:
что такое среднее арифметическое набора значений;
что такое минимум (максимум) функции на отрезке или наборе значений.

НЕОБХОДИМЫЕ БАЗОВЫЕ ЗНАНИЯ

Современные электронные таблицы умеют вычислять не только математические функции, но и множество статистических, финансовых и текстовых функций. Если в библиотеке нет нужной вам функции, её можно написать самостоятельно на языке VBA и включить в стандартную библиотеку.

Но, по крайней мере, пока нам программировать не придётся. Наша задача на сегодня — научиться пользоваться некоторыми из функций ЭТ (рис. 2.6), а затем и остальными по мере необходимости.

Название функции	**Семейство функций**	**Обозначение**
Сумма значений	Математические	СУММ()
Среднее арифметическое значение	Статистические	СРЗНАЧ()
Минимум	Статистические	МИН()
Максимум	Статистические	МАКС()

Рис. 2.6

Функции вставляют в формулы ЭТ, они участвуют в вычислениях наряду с числами и ссылками на ячейки. В скобках за обозначением функции указывается её аргумент, в нашем случае — диапазон ячеек, для которых надо вычислить значение функции.

Подробные сведения о функциях доступны в справочной системе программы электронных таблиц.

ОБОБЩЕНИЕ НОВЫХ ЗНАНИЙ

Современные ЭТ имеют мощную встроенную библиотеку разнообразных функций — математических, статистических, финансовых и прочих.

ПРИМЕНЕНИЕ ЗНАНИЙ

Откройте в ЭТ документ, сохранённый на предыдущем занятии, и перейдите на лист «Моделирование популяции».

Разграфите строку в нижней части таблицы численности популяции и подсчитайте с помощью функции ЭТ среднее арифметическое население популяции без учёта смертности и с её учётом.

Квартал	**Число кроликов**	**Число кроликов с учётом смертности**
1	20	20
2	40	40
3	80	80
4	160	16
...	...	...
14	163840	119360
15	327680	230080
Среднее арифметическое значение:		

ОПЕРАЦИИ

Вставка функции в формулу

1. Дважды щёлкнуть в ячейке с формулой для перехода в режим редактирования.

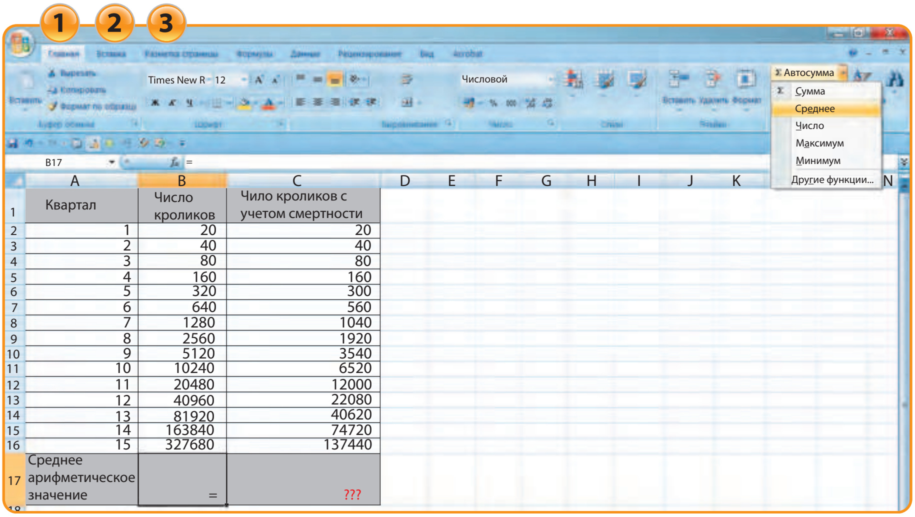
2. Выбрать вкладку *Главная*.

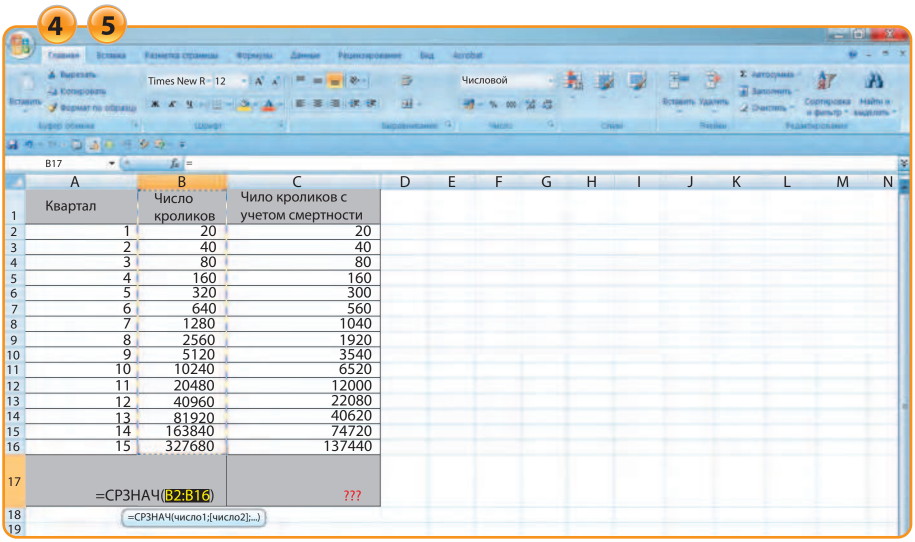
3. В группе *Редактирование* щёлкнуть на вертикальной стрелочке правее знака $\sum$ и выбрать из меню пункт *Среднее*.

4. ЭТ автоматически подставит функцию СРЗНАЧ() и задаст диапазон ячеек, по значениям которых будет вычисляться среднее арифметическое.

Если вам нужен другой диапазон, то выделите его (проведите мышью, удерживая нажатую левую кнопку, по этому диапазону).

5. Нажать клавишу Enter или значок √ *Ввод*.





Проверь себя

Задание 1

1. Вычислите с помощью электронных таблиц:

$A = 121 - 3 \cdot (34 - 71) + 43,$
$B = (5 \cdot 53 - 15)/(233 - 83),$
$C = A - B.$

2. Оформите ответ в ЭТ в виде таблицы:

$A =$	
$B =$	
$C =$	

3. Сохраните файл в папке и под именем, которые укажет учитель.

Задание 2

1. Постройте в ЭТ таблицу значений функции $y = 2 \cdot x + 3$ и её гра-фик (точечную диаграмму) для x [–5; 5] с шагом 1.

x	**y**
–5	
–4	
...	
4	
5	

2. Сохраните файл в папке и под именем, которые укажет учитель.

ПРИМЕНЕНИЕ ЗНАНИЙ *(необходимый уровень)*

Задание 1

1. Отформатируйте метеорологическую таблицу, используя стили ячеек ЭТ. Залейте ячейки с положительными значениями температуры светло–оранжевым цветом, с отрицательными — светло–синим.

Месяц	**Год**				
	2000	2001	2002	2003	2004
1	–15	–16	–14	–14	–11
2	–13	–15	–13	–13	–12
3	–6	–5	–6	–3	–5
4	3	2	–1	0	–1
5	13	11	11	11	12
6	18	16	16	16	14
7	21	20	20	22	20
8	20	20	19	18	19
9	17	17	17	16	17
10	5	6	6	3	2
11	–1	–1	–2	–1	–2
12	–13	–10	–11	–11	–9

2. Сохраните файл в папке и под именем, которые укажет учитель.

Задание 2

Найдите при помощи ЭТ значения выражений:

а) $(34 + 12)/23$;

б) $(342 + 2 \cdot 34 \cdot 12 + 122)/2$.

Задание 3

1. Постройте с помощью ЭТ модель *треугольника Паскаля*:

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
...	...	...	...	...	...	...	

Треугольник строится по следующим правилам:
- Самый левый элемент строки всегда единица.
- Любой другой элемент строки равен сумме двух элементов, расположенных в предыдущей строке над ним и левее его.
- Считается, что в пустой клетке находится 0.

2. Найдите в отдельном столбце сумму элементов каждой из строк треугольника.

Как называется полученная последовательность?

3. Сохраните файл в папке и под именем, которые укажет учитель.

Задание 4

1. Постройте в ЭТ таблицу значений функции $y = x^2$ на отрезке [–5; 5] с шагом 1.

x	y
–5	
–4	
...	
4	
5	

2. Найдите среднее арифметическое значений функции.
3. Постройте график функции (точечную диаграмму).
4. Сохраните файл в папке и под именем, которые укажет учитель.

ПРИМЕНЕНИЕ ЗНАНИЙ *(повышенный уровень)*

Задание 1

1. Создайте в ЭТ последовательность нечётных чисел от 1 до 99 в столбик.
2. Найдите сумму и среднее значение этих чисел.
3. Проверьте, верно ли, что каждое число этой последовательности, кроме первого и последнего, равно среднему арифметическому ближайших к нему сверху и снизу чисел.
4. Сохраните файл в папке и под именем, которые укажет учитель.

Задание 2

1. Постройте в ЭТ таблицу значений функции $y = x^3$ на отрезке [–5; 5] с шагом 1.

x	y
–5	
–4	
...	
4	
5	

2. Найдите среднее арифметическое значений функции. Объясните полученный результат.
3. Постройте график функции (точечную диаграмму).
4. Сохраните файл в папке и под именем, которые укажет учитель.

Задание 3

Создайте с помощью ЭТ таблицу умножения натуральных чисел от 2 до 9 такую же, как на последней странице школьной тетради в клеточку.

ПРИМЕНЕНИЕ ЗНАНИЙ *(максимальный уровень)*

Задание 1

1. Создайте с помощью ЭТ таблицу Пифагора – таблицу произведений натуральных чисел от 2 до 9. Это самая компактная форма представления таблицы умножения. Можно назвать её также одной из первых в истории математики шпаргалок:

	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Указание. Для того чтобы «запретить» ссылкам изменяться по строке или столбцу, поставьте знак $ перед обозначением строки или столбца соответственно. Можно также, выделив ссылку в процессе ввода или редактирования, нажать клавишу F4 несколько раз.

2. Сохраните файл в папке и под именем, которые укажет учитель.

Задание 2

Древняя легенда приписывает создание шахмат некоему брамину. За своё изобретение он попросил у раджи незначительную на первый взгляд награду: столько пшеничных зёрен, сколько окажется на шахматной доске, если на первую клетку положить одно зерно, на вторую – два зерна, на третью – четыре зерна и т.д. до последней 64-й клетки.

1. Создайте с помощью ЭТ модель шахматной доски с зёрнами на ней из задачи о брамине и радже. Клетки модельной доски раскрасьте в чёрный и белый цвета.
2. Подсчитайте количество зёрен в каждой из 8 горизонталей и 8 вертикалей шахматной доски. В какой из них более всего зёрен; в какой – менее всего?

1	2	4	8	16	32	64	128
...	...	...	...	...	...	...	...

3. Сохраните файл в папке и под именем, которые укажет учитель.

Итоговая проверочная работа

Задание 1

1. В таблице приведены результаты численного эксперимента и данные, полученные по результатам наблюдения за реальным процессом:

Время	Численность популяции фактическая	Численность популяции – расчёт
1	20	20
2	45	49
3	112	120
4	290	293
5	699	716
6	1700	1741
7	4135	4176
8	9698	9726
9	21100	21086
10	38950	38767
11	51405	51396
12	49412	49315
13	50564	50294
14	49895	49865
15	50160	50060
16	50120	49973
17	50212	50012
18	49294	49994
19	50052	50002
20	49299	49999
21	51001	50001
22	50700	50000
23	50300	50000
24	50200	50000
25	50170	50000
26	50030	50000
27	50070	50000
28	50120	50000
29	50130	50000

Постройте по табличным данным точечную диаграмму и дайте заключение о степени соответствия реальных данных модельным.

2. Сохраните файл в папке и под именем, которые укажет учитель.

Задание 2

Последовательность *чисел Фибоначчи* строится по следующим правилам:

а) первое число равно 1;

б) второе число равно 1;

в) каждое последующее число равно сумме двух предыдущих.

1. Постройте в ЭТ последовательность чисел Фибоначчи в столбик и определите порядковый номер первого числа, которое окажется больше миллиона.

Последовательность Фибоначчи впервые предложил итальянский математик XIII века Леонардо Пизанский, исследовавший процесс размножения... кроликов.

2. Сохраните файл в папке и под именем, которые укажет учитель.

Задание 3

1. Постройте в ЭТ последовательность первых 20 чисел Фибоначчи в столбик и рассчитайте отношение каждого следующего числа в последовательности к предыдущему. Постройте график зависимости этого отношения от порядкового номера числа.
2. Верно ли, что последовательность Фибоначчи стремится с ростом номера числа к геометрической прогрессии, причём знаменатель прогрессии равен пропорции золотого сечения $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$?

   Докажите или опровергните эту гипотезу при помощи ЭТ.
3. Сохраните файл в папке и под именем, которые укажет учитель.

§ 6. Параметризация математической модели

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ УРОКА

В процессе моделирования часто приходится видоизменять характеристики модели, не изменяя модель по существу, то есть не выдвигая новых гипотез. Например, проектируя стальной мост, увеличивают толщину материала ферм для повышения его прочности или, прогнозируя погоду, изменяют срок прогноза.

Если инженеры или учёные работают при этом с материальной моделью, они бывают вынуждены изготавливать её вновь.

- Как вы считаете, как поступают учёные в этой ситуации с информационной (математической) моделью? Сформулируйте основной вопрос урока. Сравните свой вариант с авторским (с. 285 учебника).

НЕОБХОДИМЫЕ БАЗОВЫЕ ЗНАНИЯ

С какого знака начинается формула в ЭТ? (§ 2)
Как ввести формулу в ячейку ЭТ? (§ 2)
Как отредактировать ранее введённую формулу? (§ 5)
Как скопировать формулу на диапазон ячеек? (§ 2)

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Прочитайте фрагмент разговора в магазине:

«Так, футболка симпатичная, только “висит на тебе мешком”. Какой это размер? Ну да, это L. Девушка, а поменьше футболки есть? S, например?»

Конструкторы в процессе моделирования одежды решают массу противоречивых задач. Например, как получить модную, стильную и недорогую вещь. Если им удаётся справиться с этой задачей, то они делают чертежи-выкройки сразу целого ряда предмета одежды, различающиеся размерами (рис. 2.7).

Таблица размеров женской одежды

Обхват груди (см)	Обхват бёдер (см)	Буквенное обозначение размера
80	88	XS
84	92	S
88	96	M
92	100	L
96	104	XL
100	108	XXL
104	112	XXL
108	116	XXXL

Рис. 2.7

Говоря научным языком, конструкторы **параметризуют** свои модели.

Пара́метр (от древнегреческого παραμετρέω — соразмеряю) — характеристика разных элементов некоторого множества (например, платьев одной модели), позволяющая отличать их друг от друга.

Например, в автосалоне выставлены автомашины одной фирмы. У всех них есть мотор, кузов, четыре колеса. Но они различаются такими параметрами, как мощность мотора, максимальная скорость, расход топлива и цена.

Вернёмся к нашей модели популяции. В § 4 мы создали математическую модель, которая качественно ведёт себя, как реальная популяция в условиях ограниченных ресурсов на участке земли 15×1 км.

Но мы не придумали механизм, чтобы сделать эту модель подходящей для острова любых размеров в любых условиях. На пути к цели нас ждут новые испытания, но, если мы всерьёз хотим узнать что-то новое, мы должны быть готовы к ним.

Вспомним математическое описание модели популяции в условиях ограниченных ресурсов (модели Ферхюльста):

$$N_t = N_{t-1} + N_{t-1} \cdot (1 - N_{t-1} / 10\,000),$$

где: N_t – число животных в текущем квартале;

N_{t-1} – число животных в предыдущем квартале.

10 000 – максимальное число животных, способных прокормиться на территории, по нашим расчётам.

Красным цветом выделена часть формулы, выражающая прирост численности популяции в текущем квартале. Теперь представьте себе, что, в силу изменения внешних условий, у родителей стало ежеквартально рождаться более двух потомков (улучшился климат и т.п.). В таком случае мы должны умножить выделенное красным цветом выражение на некоторый коэффициент – число, отражающее прирост рождаемости населения популяции:

$$N_t = N_{t-1} + k \cdot N_{t-1} (1 - N_{t-1} / 10\,000),$$

где: k – коэффициент роста популяции.

Если в популяции у пары кроликов ежеквартально рождается 2 потомка, то $k = 1$ (случай, рассмотренный нами в § 4). Если рождается 4 кролика, то k станет равно 2. А если $k = 0$, то рост популяции прекратится.

Теперь мы можем сказать, что у нашей модели появился *первый параметр* – коэффициент роста популяции k ($0 \leqslant k \geqslant \infty$). Остаётся провести численный эксперимент и проверить, как этот параметр «работает». Выполните для этого задания к параграфу.

ОБОБЩЕНИЕ НОВЫХ ЗНАНИЙ

Пара́метр — характеристика разных элементов некоторого множества, позволяющая отличать их друг от друга.

Каждая модель характеризуется множеством параметров. Находя критически важные параметры и варьируя их значения, инженеры и учёные исследуют модель.

ПРИМЕНЕНИЕ ЗНАНИЙ

1. Откройте сохранённый ранее документ и перейдите на новый лист.

Назовите этот лист «Модель с параметром», на нём мы продолжим исследование модели развития популяции кроликов при ограниченных ресурсах.

Выделите мышью таблицу роста популяции на листе «Моделирование популяции», скопируйте её. Перейдите на лист «Модель с параметром» и вставьте в него копию таблицы.

Далее удалите из таблицы столбцы «Число кроликов» и «Число кроликов с учётом смертности», мы будем экспериментировать с моделью в столбце «Число кроликов с учётом смертности и ограниченности ресурсов».

Выберите справа или выше от таблицы пустую ячейку для коэффициента роста популяции, занесите в ячейку начальное значение, равное 1. Осталось подписать ячейку, занеся в пустую ячейку слева или сверху букву *k*.

В ячейке для 2-го квартала должна находиться формула, соответствующая математической модели:

$$N_1 + N_1 \cdot (1 - N_1 / 10\,000),$$

где N_1 — начальное число животных;

10 000 — максимальное число животных, способных прокормиться на территории, по нашим расчётам.

Ваша задача состоит в том, чтобы добавить в формулу параметр — коэффициент роста популяции *k*:

$$N_1 + k \cdot N_1 \cdot (1 - N_1 / 10\,000).$$

В формуле ЭТ коэффициенту *k* будет соответствовать **абсолютный адрес** ячейки со значением параметра нашей модели.

Абсолютный адрес означает, что он не будет изменяться при копировании формул, так как для нас важно, чтобы во все формулы модели подставилось одно и то же значение параметра.

Отредактировав формулу для 2-го квартала, скопируйте её на диапазон ячеек численности популяции для кварталов 3–15. Значения численности в ячейках не должны при этом измениться, так как значение коэффициента роста *k* равно 1. Умножение на единицу не изменит значений в столбце численности популяции.

Теперь мы можем менять параметр роста популяции сразу для всех расчётных формул ячеек нашей таблицы. Мы подошли к самому интересному моменту нашего исследования.

Но прежде чем шагнуть дальше, построим уже знакомый нам график роста популяции.

2. Постройте по результатам расчётов численности популяций с учётом ограниченных ресурсов точечную диаграмму для кварталов 1–15.

3. Попробуйте изменить значение коэффициента роста *k*. Сделайте его для начала равным 2. А потом 1,5. Попробуйте поэкспериментировать с моделью самостоятельно.

У Пьера Ферхю́льста не было компьютера, и он тратил на численные эксперименты со своими моделями не секунды, а дни и недели. Но зато как был удивлён учёный, когда из-под его карандаша вдруг вышли просто чудеса! Об этом вы узнаете в следующем параграфе.

ОПЕРАЦИИ

Вставка в формулу абсолютного адреса ячейки

1. Дважды щёлкните на ячейке с формулой или выделите её и нажмите клавишу F2.

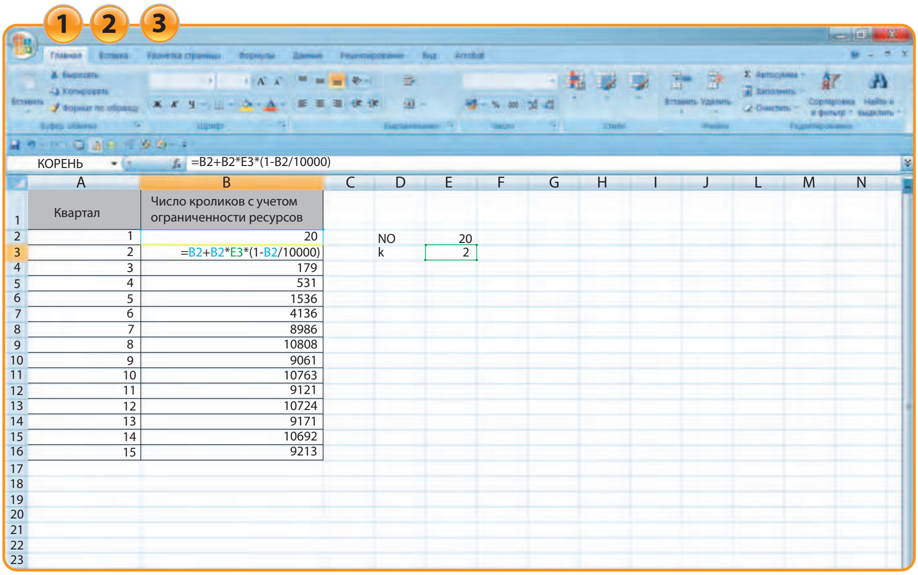
2. Поставьте курсор в то место формулы, где должна быть ссылка (адрес).

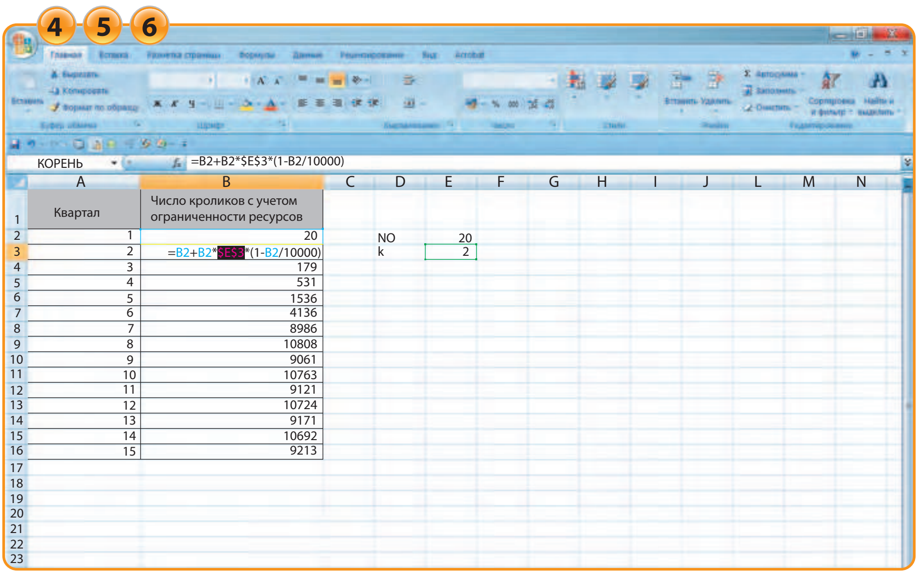
3. Щёлкните на ячейке, на которую надо сослаться.

4. Пока ссылка выделена, нажмите клавишу F4, чтобы превратить ссылку в абсолютную или вручную введите знак $ перед обозначениями строки и столбца в ссылке.

5. Не забудьте ввести знак умножения после ссылки на ячейку с параметром *k*.

6. Когда формула будет готова, нажмите клавишу Enter или значок √ *Ввод*


1
2
3
КОРЕНЬ
=B2+B2*E3*(1-B2/10000)
Квартал
Число кроликов с учетом ограниченности ресурсов
1 20
2 =B2+B2*E3*(1-B2/10000)
3 179
4 531
5 1536
6 4136
7 8986
8 10808
9 9061
10 10763
11 9121
12 10724
13 9171
14 10692
15 9213
NO 20
k 2


4
5
6
КОРЕНЬ
=B2+B2*E3*(1-B2/10000)
Квартал
Число кроликов с учетом ограниченности ресурсов
1 20
2 =B2+B2*E3*(1-B2/10000)
3 179
4 531
5 1536
6 4136
7 8986
8 10808
9 9061
10 10763
11 9121
12 10724
13 9171
14 10692
15 9213
NO 20
k 2

§ 7. Исследование модели на примере модели развития популяции с ограниченными ресурсами

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ УРОКА

Посмотрите на приведённые на рис. 2.8 диаграммы. Они построены на основе расчётов по моделям развития популяции с различными коэффициентами роста: от 1 до 2,8.

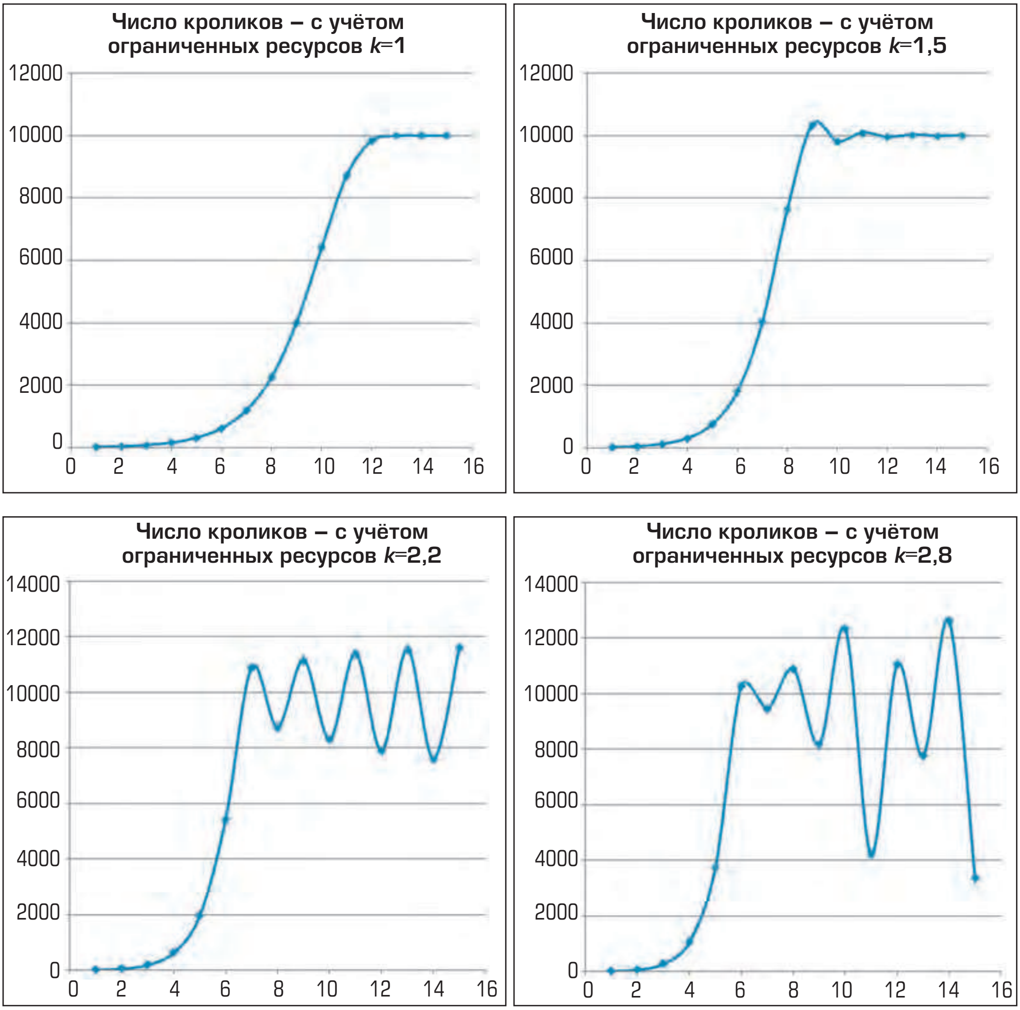


Рис. 2.8

А теперь представьте себе, что вам нужно дать заключение о численности популяции через 2 года после начала эксперимента с коэффициентом роста 2,8.

• Как вы считаете, какова проблема, с которой имеют дело учёные в подобной ситуации? Сформулируйте основной вопрос урока. Сравните свой вариант с авторским (с. 285 учебника).

НЕОБХОДИМЫЕ БАЗОВЫЕ ЗНАНИЯ

Как переименовать лист ЭТ? (§ 1)

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

XX век разрушил множество стереотипов, укоренившихся в классической науке. Возможно, главным среди них оказался детерининизм (предопределённость) научной картины мира. В соответствии с детерминизмом, любой процесс протекает единственно возможным путём, заданным начальными условиями и внешними воздействиями. Два одинаковых снаряда, выпущенные из пушки подряд, ложатся рядом, по крайней мере в математической модели. В жизни это не совсем так, но это нетрудно объяснить случайными факторами, которые невозможно учесть при моделировании.

Когда математик Пьер Ферхюльст одним из первых столкнулся с хаотическим и непредсказуемым поведением математической модели, он наверняка подумал, что ошибся в расчётах. Однако повторные вычисления приводили к тому же странному результату. При некоторых значениях параметров модель «выходила из повиновения» и выдавала странные цифры.

В этой ситуации математикам оставалось лишь набраться мужества и заняться исследованием «загадочного» мира чисел. Но в процессе исследования оказалось, что умозрительные выкладки очень тесно соприкасаются с реальной жизнью.

Мы получили на предыдущем занятии действующую модель популяции с единственным параметром – коэффициентом роста k. Можно было ожидать, что наша модель будет реагировать на его изменения примерно так же, как автомобиль реагирует на нажатие педали газа: будет убыстрять или замедлять свой рост. Но мы видим по графикам, что в действительности дело обстоит иначе. Убедимся в этом сами. Для этого проведём численный эксперимент со значениями коэффициента роста k, равными 0,5; 1; 1,5; 2 и 2,5.

ОБОБЩЕНИЕ НОВЫХ ЗНАНИЙ

Модели далеко не всегда ведут себя так, как ожидают их создатели. Непредсказуемое поведение модели может быть следствием как несовершенства самой модели или погрешностей в расчётах, так и неожиданными особенностями объекта моделирования.

Во время моделирования необходимо всегда сверять поведение модели с оригинальным процессом или явлением.

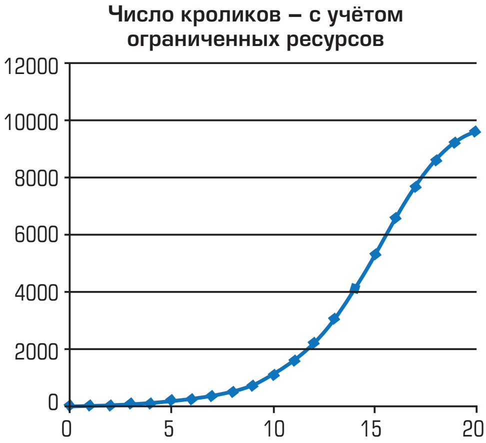
ПРИМЕНЕНИЕ ЗНАНИЙ

Откройте документ, сохранённый на предыдущем занятии, перейдите на новый лист и назовите его «Исследование модели с параметром».

Разграфите на листе приведённую ниже таблицу.

Перейдите на лист «Модель с параметром» и задайте первое значение коэффициента роста. Сделайте скриншот с рабочего листа.

Вернитесь на лист «Исследование модели с параметром», вставьте скриншот, обрежьте его по диаграмме и опишите в таблице поведение модели.

Коэффициент роста *k*	0,5	1	1,5	2	2,5
Описание поведения модели	Плавный рост популяции с замедлением и выходом на значение 10 000 особей				
Скриншот диаграммы роста					

Аналогично исследуйте поведение модели в оставшихся четырёх случаях.

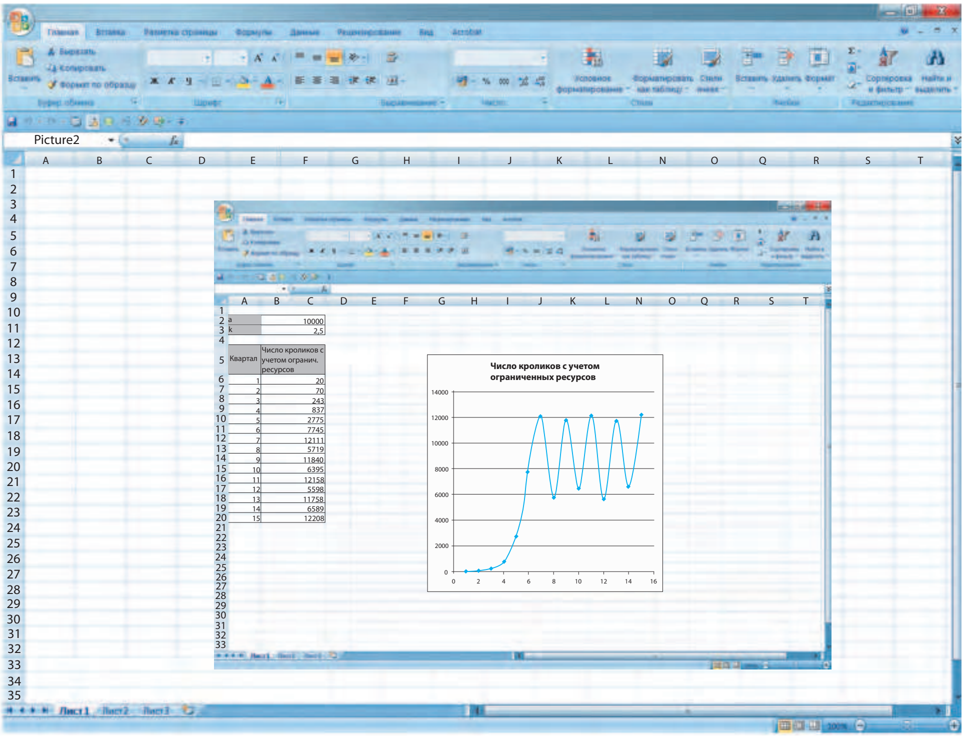
ОПЕРАЦИИ

Получение скриншота рабочего окна программы и вставка его на лист ЭТ

1. Щёлкнуть в окне, скриншот которого вы хотите получить.

2. Нажать комбинацию клавиш Alt+PrintScreen. «Снимок» окна (скриншот) будет помещён в буфер обмена операционной системы.

3. Щёлкнуть в окне правой кнопкой мыши и выбрать в контекстном меню пункт *Вставить*. Скриншот будет вставлен из буфера обмена в окно ЭТ. Удобно использовать также комбинацию клавиш Ctrl+V.

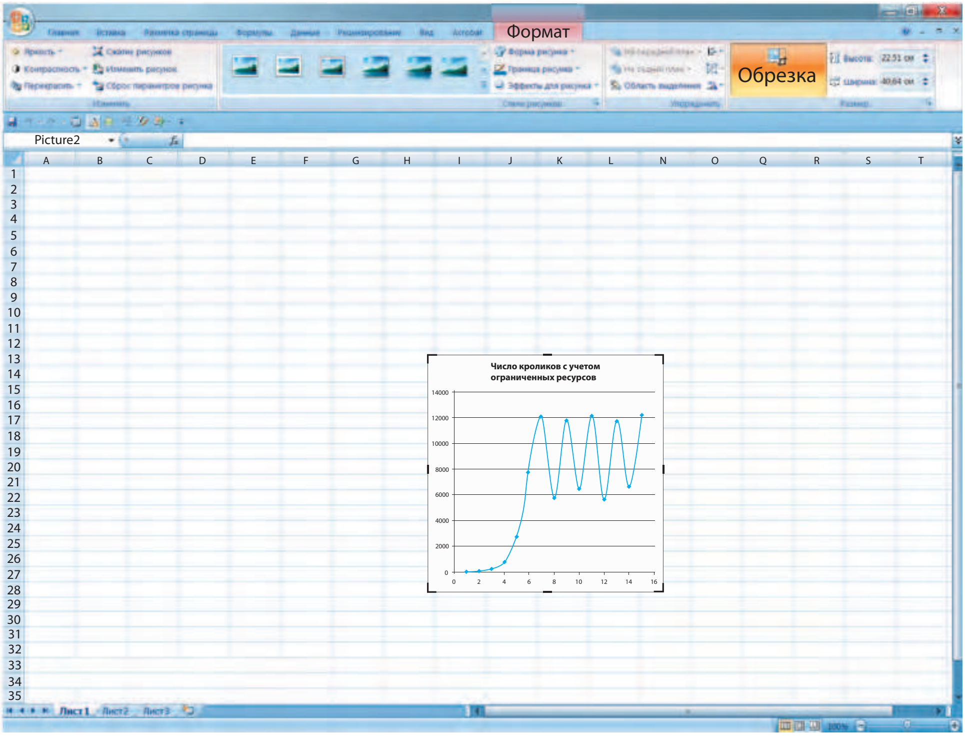


Форматирование скриншота

1. Выбрать вкладку *Формат*.

2. Обрезать скриншот по контуру при помощи инструмента *Обрезка*, оставив только нужную его часть.

3. Пропорционально уменьшить скриншот до разумного размера, перетаскивая его уголок в сторону центра.



§ 8. Экологические системы с несколькими переменными. Моделирование системы «хищник – жертва»

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ УРОКА

Мысленно перенесёмся на американский континент. Начиная с 1845 года, компания «Гудзонов залив» ежегодно публиковала данные о цене и количестве шкур, заготавливаемых ежегодно в Канаде.

Эти данные попали в руки учёных, которые обратили внимание на удивительную периодичность колебания цен на шкуры зайцев и рысей, связанных с количеством шкур на рынке и, следовательно, численностью животных в природе (рис. 2.9).

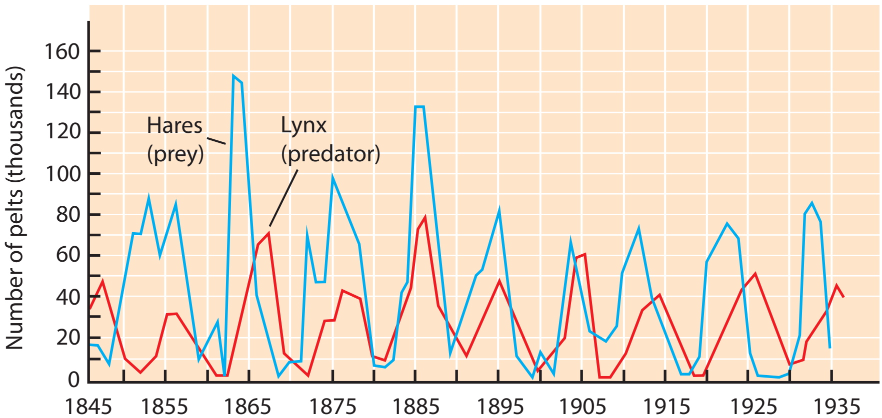


Рис. 2.9

В результате научный мир получил ещё одну сенсацию. Конъюнктура рынка, то, что, казалось, зависело только от стечения обстоятельств и везения, вдруг стала предметом внимания математиков, способных давать надёжные прогнозы на год-два вперёд. Так и до научных прогнозов погоды рукой подать. Действительно, через тридцать лет люди научились правильно предсказывать погоду, правда, на небольшие сроки.

Исследователи XIX века стремились всего лишь предсказать конъюнктуру рынка, но совершенно неожиданно труды учёных, создавших модель явления и исследовавших его, заложили новую науку. Это была *математическая экология*.

- Что позволило учёным сделать открытие? Сформулируйте главный вопрос урока. Сравните свой вариант с авторским (с. 285 учебника).

НЕОБХОДИМЫЕ БАЗОВЫЕ ЗНАНИЯ

Вспомните, как редактируют формулы в ЭТ с использованием абсолютных и относительных ссылок. (§ 2, 6)

Вспомните, как нужно строить точечную диаграмму по нескольким сериям табличных данных. (§ 3)

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Занятие наукой, и в частности моделирование естественных процессов, часто заставляет задуматься об устройстве мира.

В XX веке была открыта тесная взаимосвязь численности обитающих на одной территории видов животных и того факта, что жертвы и хищники (например, зайцы и рыси) извлекают обоюдную эволюционную выгоду из сосуществования.

Вам будет интересно узнать, что, наблюдая за приключениями хищников и жертв, вы нечаянно приобретаете представление, например, о… кинетике химических и ядерных реакций. (Кинетика описывает развитие реакции во времени.) В химии частицы-реагенты за счёт диффузии движутся, встречаясь друг с другом, вступают в реакции, в которых они гибнут, производят новые частицы и т.д.

Соответственно в физике размножению зайцев соответствует, например, рождение нейтронов в цепной ядерной реакции, их умирание – поглощению нейтронов в ядрах графита активной зоны реактора.

Тот факт, что поведение химических молекул и животных в экосистеме похоже, говорит о единстве окружающего нас мира.

А мы пока займёмся исследованием задачи о зайцах (будем считать, что это те же кролики, только более «подготовленные в спортивном плане») и рысях, то есть задачи о развитии популяций хищников и жертв.

Реальные процессы в природе и обществе гораздо сложнее, чем те элементарные примеры, что мы рассмотрели в предыдущих параграфах, и сложность их моделирования возрастает не только из-за сложности составления модели, но и из-за колоссальных объёмов вычислений на этапе численного эксперимента. Так, при расчёте прогнозов погоды приходится вычислять значения температуры, атмосферного давления, силы и направления ветра в узлах сетки, «натянутой» на карту континента или всего земного шара. Такие модели рассчитывают на суперкомпьютерах.

Попробуем и мы решить задачу посложнее – моделирование системы «хищник – жертва». За решение проблемы межвидовой конкуренции взялись сразу двое учёных, причём независимо друг от друга. Американец Альфред Лотка опубликовал свои результаты в 1925 году, а итальянец Вито Вольтерра сделал это годом позже. Получившаяся модель была названа по имени учёных моделью Лотки – Вольтерра.

Альфред Джеймс Лотка – американский математик, статистик. Руководил математическими исследованиями в крупнейшей американской страховой компании Metropolitan Life Insurance. Был одним из продолжателей дела Т. Мальтуса. В 1907-м показал, что население, растущее неизменным темпом и сохраняющее неизменный порядок вымирания, стремится к определённому возрастному составу и постоянным коэффициентам рождаемости и смертности.

Лотка изучал процесс смены поколений, дал современное определение длины поколения, анализировал демографическое развитие семьи. Цикл этих работ принёс Лотке известность как основателю современной экономической демографии и автору теории стабильного населения.

Альфред Лотка (1880–1949)

Вито Вольтерра – итальянский математик. Интерес к математике начал проявляться в нём довольно рано, в возрасте 11 лет. Под впечатлением от романа Жюля Верна «Путешествие на Луну» он занялся расчётами траектории снаряда в атмосфере. Также он изучал геометрию Лежандра. В возрасте 13 лет начал заниматься трёхмерными задачами и добился некоторых успехов в разбиении времени на маленькие интервалы, на которых он мог рассматривать силовую константу.

В 1905 году Вольтерра стал самым молодым сенатором Итальянского королевства. Однако в 1931 году он отказался принести присягу фашистскому правительству, за что был лишён членства во всех итальянских университетах и жил преимущественно за границей, вернувшись на родину лишь накануне кончины.

Вито Вольтерра (1860–1940)

Для начала немного порассуждаем. Нужно ли учитывать в нашей модели естественную смертность жертв? Наблюдения показывают, что обитатели нижних этажей в пищевых пирамидах практически никогда не умирают естественной смертью. Стоит животному потерять спортивную форму, как оно становится добычей хищника. Таков суровый закон природы.

Хищники, обитающие на верхнем этаже пищевой пирамиды, умирают естественной смертью, но при этом скорость их размножения зависит не только от их количества, но и от источника пищи, то есть числа жертв.

Составим теперь математическое описание задачи.

Для числа жертв получим следующее выражение:

$$N_t = N_{t-1} + k \cdot N_{t-1} - m \cdot P_{t-1} \cdot N_{t-1},$$

где N_t – число зайцев в текущем году;

N_{t-1} – число зайцев в предыдущем году;

k – коэффициент размножения жертв;

m – коэффициент потерь жертв;

P_{t-1} – число хищников в предыдущем году.

Примечание. Поскольку в суровых условиях Канады зайцы и рыси приносят только одно потомство в год, мы будем измерять время не в кварталах, а в годах.

Первые два слагаемых в формуле уже знакомы вам по задаче о кроликах. Смертность жертв и влияние ограниченности ресурсов мы не учитываем, так как размер популяции жертв находится под контролем хищников.

Третье слагаемое со знаком минус – математическое выражение потерь жертв от хищников. Его абсолютная величина пропорциональна произведению числа жертв на число хищников, так как вероятность их встречи пропорциональна этому произведению. Далеко не каждая встреча заканчивается гибелью жертвы, это обстоятельство учитывает коэффициент потерь m.

Для числа хищников получим следующее выражение:

$$P_t = P_{t-1} - d \cdot P_{t-1} + b \cdot P_{t-1} \cdot N_{t-1},$$

где d – коэффициент смертности хищников;

b – коэффициент размножения хищников.

Второе слагаемое со знаком минус отражает естественное вымирание хищников из-за возраста и болезней.

Третье слагаемое – рождаемость хищников, пропорциональная как числу хищников, так и числу жертв. Темп рождаемости учитывает коэффициент b.

Теперь время перейти к численному эксперименту с нашей моделью.

ОБОБЩЕНИЕ НОВЫХ ЗНАНИЙ

Занятие наукой, и в частности моделирование естественных процессов, нередко заставляет задуматься об устройстве мира. Зачастую, решая узкую прикладную задачу, учёные неожиданно делают фундаментальные открытия.

Сложные объекты моделирования описываются уравнениями с большим числом переменных. Соответствующие математические модели содержат большое число уравнений, для решения которых требуются большие вычислительные мощности.

ПРИМЕНЕНИЕ ЗНАНИЙ

1. Откройте в ЭТ документ, сохранённый на предыдущем занятии, и добавьте в него новый рабочий лист. Назовите лист «Хищник – жертва».

Разграфите на листе таблицу с тремя столбцами, озаглавьте их «Время, лет», «Жертвы», «Хищники». Столбец «Время, лет» заполните значениями от 0 до 50. В столбцы «Жертвы» и «Хищники» занесите начальные значения численности популяций 1000 и 95.

Рядом с таблицей численности популяций разграфите табличку для параметров нашей математической модели. Заполните её начальными значениями.

Время, лет	**Жертвы**	**Хищники**
1	1000	95
2		
3		
...		
50		

Коэффициенты модели			
k:	0,05	*d*:	0,05
m:	0,001	*b*:	0,00005

В ячейку для числа жертв в 1-й год занесите формулу, соответствующую уравнению

$$N_t = N_{t-1} + k \cdot N_{t-1} - m \cdot P_{t-1} \cdot N_{t-1}.$$

Указание. Значения параметров подставьте в формулу как абсолютные ссылки на ячейки в таблице «Коэффициенты модели».

В ячейку для числа хищников в 1-й год занесите формулу, соответствующую уравнению

$$P_t = P_{t-1} - d \cdot P_{t-1} + b \cdot P_{t-1} \cdot N_{t-1}.$$

Заполните формулами ячейки для диапазона времени 0–50 лет.

2. Постройте по результатам расчётов численности популяций хищников и жертв точечную диаграмму для диапазона времени 0–50 лет. Затем расширьте интервал времени до 200–250 лет. Перестройте диаграмму для нового временного интервала.

Сверьте свой график с авторским. Обратите внимание, что максимумы численности жертв опережают максимумы хищников. Сравните с диаграммой компании «Гудзонов залив», приведённой в начале параграфа (см. рис. 2.9).

3. • Исследуйте самостоятельно, как влияют параметры модели на численность популяций хищников и жертв.

Теперь вы понимаете, насколько хрупок мир, который нас окружает?

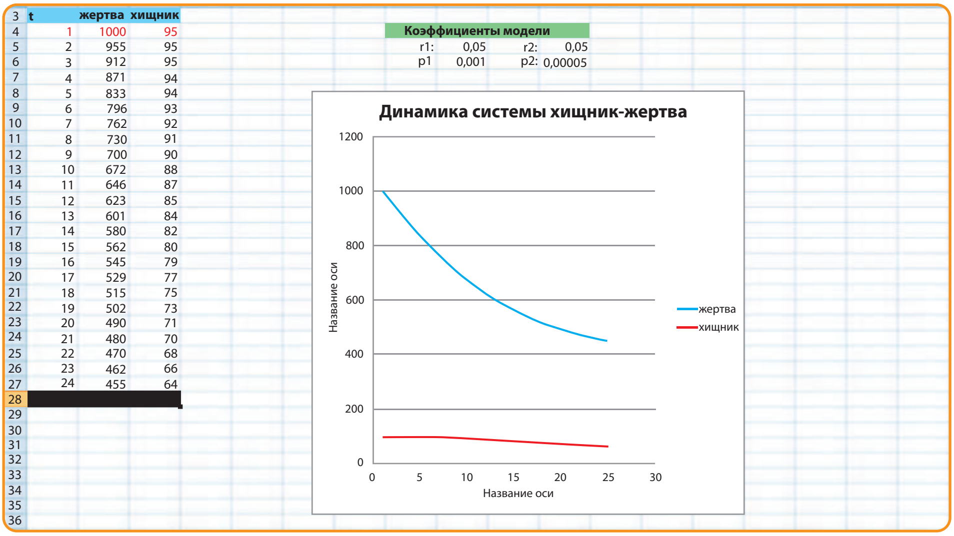
ОПЕРАЦИИ

Расширение таблицы по оси времени при помощи копирования

1. Выделите часть нижней строки таблицы, подлежащую расширению.

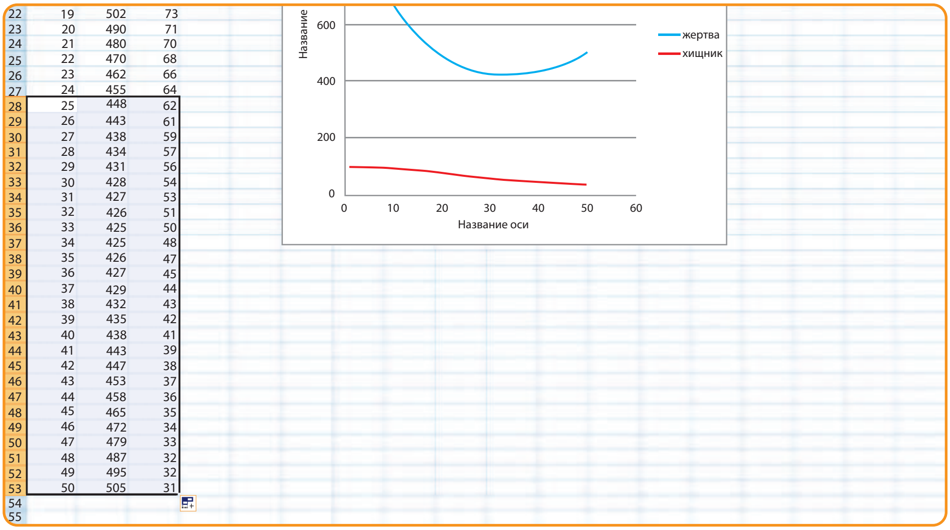
2. Подведите курсор к правому нижнему углу выделенного диапазона, он превратится в маленький крестик.

3. Протащите курсор, держа нажатой левую кнопку мыши, вниз и заполните ячейки копиями формул. Операцию заполнения можно выполнять в несколько этапов.



3	t	жертва	хищник
4	1	1000	95
5	2	955	95
6	3	912	95
7	4	871	94
8	5	833	94
9	6	796	93
10	7	762	92
11	8	730	91
12	9	700	90
13	10	672	88
14	11	646	87
15	12	623	85
16	13	601	84
17	14	580	82
18	15	562	80
19	16	545	79
20	17	529	77
21	18	515	75
22	19	502	73
23	20	490	71
24	21	480	70
25	22	470	68
26	23	462	66
27	24	455	64

Коэффициенты модели			
r1:	0,05	r2:	0,05
p1	0,001	p2:	0,00005



22	19	502	73
23	20	490	71
24	21	480	70
25	22	470	68
26	23	462	66
27	24	455	64
28	25	448	62
29	26	443	61
30	27	438	59
31	28	434	57
32	29	431	56
33	30	428	54
34	31	427	53
35	32	426	51
36	33	425	50
37	34	425	48
38	35	426	47
39	36	427	45
40	37	429	44
41	38	432	43
42	39	435	42
43	40	438	41
44	41	443	39
45	42	447	38
46	43	453	37
47	44	458	36
48	45	465	35
49	46	472	34
50	47	479	33
51	48	487	32
52	49	495	32
53	50	505	31

Расширение области значений диаграммы в ЭТ

1. Щёлкните на диаграмме, область значений которой надо изменить. Область значений функции выделится на таблице синей рамкой, аргумента – сиреневой.

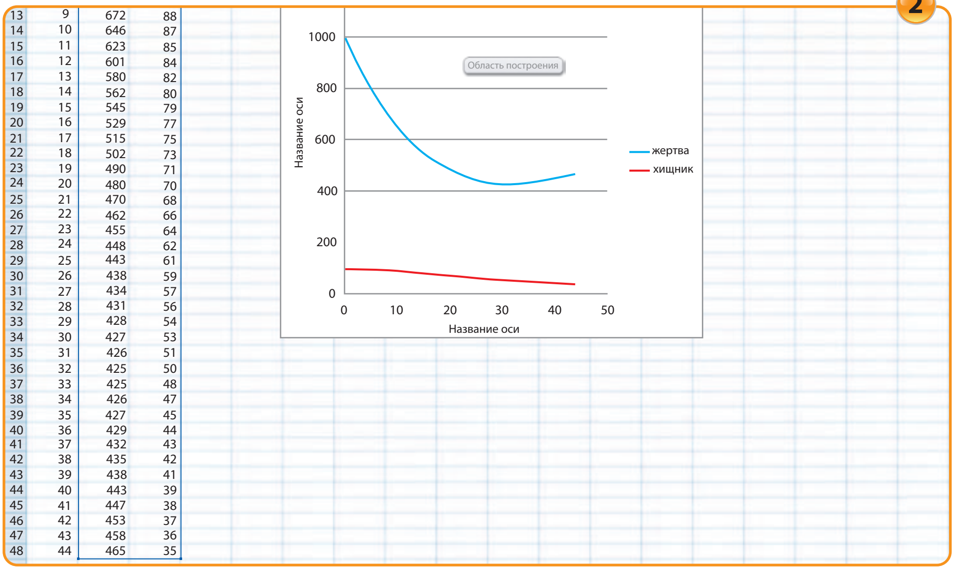
2. Расширьте рамку, протащив её вниз за правый нижний угол. Диаграмма перестроится автоматически.

1

3	Время, лет	жертва	хищник
4	0	1000	95
5	1	955	95
6	2	912	95
7	3	871	94
8	4	833	94
9	5	796	93
10	6	762	92
11	7	730	91
12	8	700	90
13	9	672	88
14	10	646	87
15	11	623	85
16	12	601	84
17	13	580	82
18	14	562	80
19	15	545	79
20	16	529	77
21	17	515	75
22	18	502	73
23	19	490	71
24	20	480	70
25	21	470	68
26	22	462	66
27	23	455	64
28	24	448	62
29	25	443	61
30	26	438	59
31	27	434	57
32	28	431	56
33	29	428	54

Коэффициенты модели			
k:	0,05	d:	0,05
m:	0,001	b:	0,00005

2



13	9	672	88
14	10	646	87
15	11	623	85
16	12	601	84
17	13	580	82
18	14	562	80
19	15	545	79
20	16	529	77
21	17	515	75
22	18	502	73
23	19	490	71
24	20	480	70
25	21	470	68
26	22	462	66
27	23	455	64
28	24	448	62
29	25	443	61
30	26	438	59
31	27	434	57
32	28	431	56
33	29	428	54
34	30	427	53
35	31	426	51
36	32	425	50
37	33	425	48
38	34	426	47
39	35	427	45
40	36	429	44
41	37	432	43
42	38	435	42
43	39	438	41
44	40	443	39
45	41	447	38
46	42	453	37
47	43	458	36
48	44	465	35

§ 9. Оптимизация и моделирование

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ УРОКА

Известно, что в мирное время многие военные производства переживают трудные времена. Страна не нуждается в больших количествах ракет, танков и самолётов, ей нужны автомобили, компьютеры и телевизоры.

Поэтому многие военные предприятия вынуждены в наши дни искать способы выпуска мирной продукции, или, говоря на языке экономики, заниматься конверсией. Это очень и очень непростое дело. Нужно, чтобы производство новой, не типичной для предприятия продукции было эффективным.

• На каком этапе производства, по вашему мнению, нужно начинать его оптимизацию? Попробуйте сформулировать основной вопрос урока. Сравните свой вариант с авторским (с. 285 учебника).

НЕОБХОДИМЫЕ БАЗОВЫЕ ЗНАНИЯ

Посмотрите в словаре значение слова «оптимизация».

Вспомните из курса геометрии, как найти длину окружности и площадь круга по диаметру.

Прочитайте статью о цилиндре в Википедии и узнайте, чему равен его объём и площадь полной поверхности.

Вспомните из курса физики, как связан объём физического тела с его массой.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Как-то автору попалось в рекламной газете «Из рук в руки» такое объявление: «Предприниматель готовит на базе цеха ширпотреба авиационного завода выпуск лёгких и практичных вёдер из пищевого алюминия. Для подготовки массового производства приглашаются опытный инженер-технолог и конструктор со стажем работы на производстве не менее 5 лет».

Из текста объявления очевидно, что предприниматель провёл исследование рынка и нашёл тот товар, который будет пользоваться спросом. В настоящее время перед ним стоит задача налаживания эффективного производства, для чего ему нужны грамотные специалисты.

У нас с вами есть за плечами небольшой опыт занятий моделированием в среде электронных таблиц. Давайте попробуем составить конкуренцию конструктору со стажем и применить наш опыт для поиска оптимального решения по массовому производству изделия.

Прежде всего, поставим задачу.

Пищевой алюминий – лёгкий, экологически чистый металл (плотность 2 700 кг/м^3). Для сравнения, у стали плотность 7 800 кг/м^3, что почти в три раза больше. Кроме того, обычная сталь ржавеет, и изделия из неё надо покрывать для защиты от коррозии слоем цинка или эмали, что делает стальную посуду непрактичной и тяжёлой.

Но, как говорят, недостатки – продолжение достоинств. Тонна листового пищевого алюминия стоит 150 000 руб. (для сравнения, стоимость тонны листовой углеродистой стали – 25 000 руб). Разница в цене в 6 раз! Следовательно, задача экономии материала при выпуске продукции из нового материала выдвигается на первый план.

Пусть требуемый объём нашего ведра – 10 литров (10 дм^3). Нам надо спроектировать самое лёгкое ведро заданного объёма.

На этапе проектирования возникает проблема выбора формы ведра. Достаточно практичной является форма усечённой пирамиды, позволяющая вставлять вёдра друг в друга, или форма цилиндра. Для простоты проектирования мы выберем второй вариант и сразу столкнёмся со следующей проблемой: какое отношение диаметра цилиндра к его высоте выбрать (рис. 2.10)?

Очевидно, что непомерно широкое ведро-таз и высокое ведро-труба не самые удобные и лёгкие из возможных вариантов. Значит, где-то в промежутке между ними существует ведро оптимальных пропорций.

Для решения проблемы оптимальных пропорций ведра создадим его *математическую модель*.

Из курса школьной математики, подкреплённой вашим здравым смыслом, известно, что развёрткой цилиндра является прямоугольник боковой поверхности и два круга основания. Один из кругов станет дном будущего ведра, а второй – его крышкой (рис. 2.11).

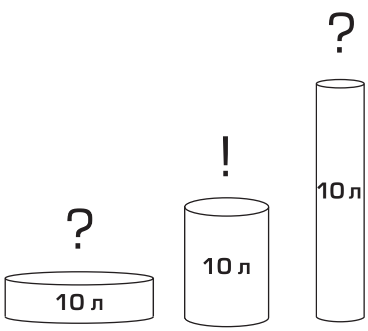


Рис. 2.10

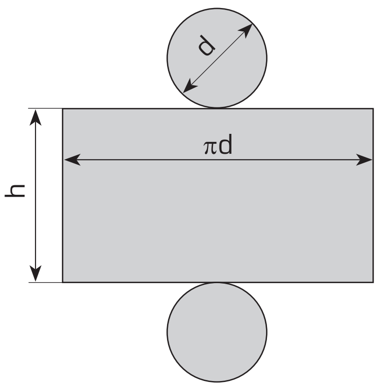


Рис. 2.11

Площадь развёртки ведра с крышкой сложится из площади боковой поверхности, дна и крышки:

$S = \pi dh + \pi d^2/4 + \pi d^2/4 = \pi dh + \pi d^2/2.$

Объём развёртки ведра будет равен произведению её площади на толщину материала:

$V = \delta(\pi dh + \pi d^2/2),$

а масса ведра – произведению объёма развёртки на плотность материала:

$P = \rho\delta(\pi dh + \pi d^2/2).$

Теперь рассчитаем объём ведра. Объём цилиндра равен произведению высоты на площадь основания:

$V = h\pi d^2/4.$

В нашем случае он задан равным 10 литрам. Это означает, что в процессе численного эксперимента с моделью мы не можем произвольно менять значения диаметра и высоты ведра, а должны менять согласованно, чтобы объём оставался равным 10 литрам. Перейдём к численному эксперименту, направленному на оптимизацию модели – получение эффективных параметров ведра.

ОБОБЩЕНИЕ НОВЫХ ЗНАНИЙ

Моделирование и оптимизация очень тесно связаны друг с другом.

Часто некоторый объект моделируют на этапе проектирования для поиска его оптимальных параметров.

Ещё чаще математическое моделирование, оптимизация и проектирование производятся одновременно, в одной среде разработки.

ПРИМЕНЕНИЕ ЗНАНИЙ

1. Запустите ЭТ и разграфите новую таблицу.

Высота ведра, дм	**Диаметр ведра, дм**	**Объём ведра, дм^3 (л)**	**Площадь развёртки ведра с крышкой, дм^2**	**Масса ведра, кг**
1	3,57	10,01	31,24	0,44
2	3*			
3	3*			
4	3*			
5	3*			

*Точное значение подберите из условия получения объёма ведра, равного 10 литрам.

Для простоты формул вычисления будем вести в дециметрах. Тогда будем считать толщину стенки ведра δ = 0,5 мм = 0,005 дм. Плотность алюминия ρ = 2700 кг/м^3 = 2,7 кг/дм^3. Введите формулы для объёма и массы в верхние ячейки столбцов и заполните столбцы формулами.

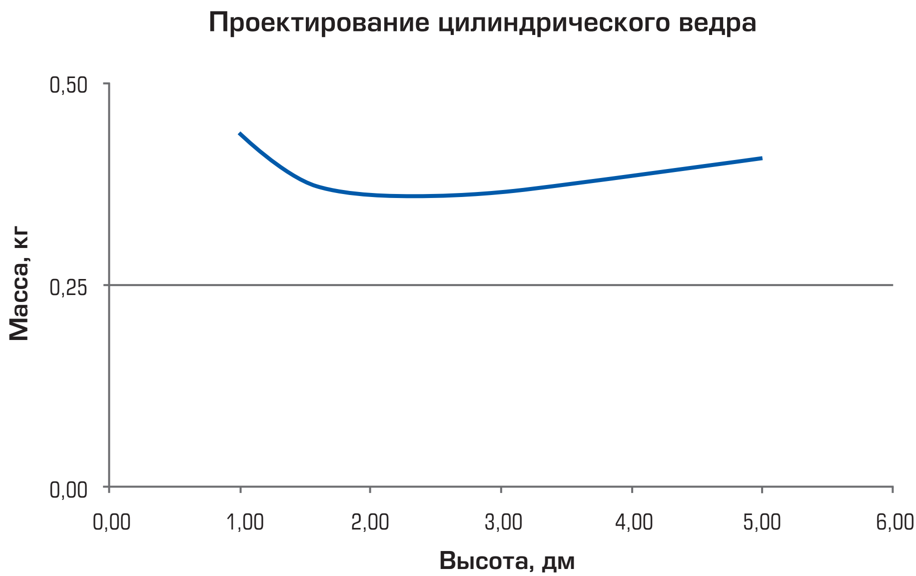
Далее остаётся подобрать вручную такие значения диаметра ведра, чтобы его объём был близок к 10 литрам с ошибкой не более 0,1 литра.

«А зачем это делать?» – могут спросить те из вас, кто хорошо знает алгебру. Вопрос резонный, не проще ли выразить диаметр ведра через высоту и объём, а затем подставить его в формулу для массы.

Действительно, можно сделать так в случае простейшей задачи вроде нашей. Но большинство реальных задач настолько сложны, что не поддаются аналитическому решению.

2. Постройте по результатам расчётов массы ведра точечную диаграмму для диапазона его высоты 1–5 дм.

Найдите значение высоты и диаметра, при котором масса 10-литрового ведра и, следовательно, расход алюминия на него будут минимальными.



Сохраните документ в папке и под именем, которые укажет учитель.

§ 10. Поиск решения в процессе моделирования

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ УРОКА

Решая задачу о самом лёгком ведре заданного объёма, вы выполняли ручную подгонку диаметра ведра для того, чтобы «вписаться» в заданный объём. Кроме того, полученный в результате моделирования минимум массы оказался на графике «размытым» так, что определить его точно достаточно непросто, а при массовом производстве ошибка «непопадания» в минимум стоит заметных производственных издержек.

Как вам хорошо известно, ручные рутинные операции утомительны и для их автоматизации придуман компьютер.

• Как вы думаете, позволяют ли электронные таблицы избежать рутинных операций? Сформулируйте основной вопрос урока. Сравните свой вариант с авторским (с. 285 учебника).

НЕОБХОДИМЫЕ БАЗОВЫЕ ЗНАНИЯ

Посмотрите в словаре, что означают слова «автомат», «автоматический», и подумайте об их значении в контексте этого параграфа.

Каким геометрическим телом является развёртка реального ведра, изготовленного из листа? (§ 9)

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Прочитайте фрагмент текста справки к ЭТ *Microsoft Excel*:

«Надстройка *Поиск решения* является частью блока задач, который иногда называют анализом "что-если"».

Поиск решения позволяет найти **оптимальное значение** для формулы, содержащейся в одной ячейке, называемой **целевой**. *Поиск решения* работает с группой ячеек, прямо или косвенно связанных с формулой в целевой ячейке.

Чтобы получить заданный результат по формуле из целевой ячейки, надстройка изменяет значения в назначенных ячейках, называемых **изменяемыми ячейками**. В процессе оптимизации могут применяться ограничения на другие ячейки, влияющие на формулу для целевой ячейки».

Внимание! Для выполнения заданий в ЭТ *Microsoft Excel* должна быть установлена и активизирована надстройка *Поиск решения*. Инструкцию, как это сделать, можно получить в справке по *Excel*. Если надстройка установлена, на вкладке *Данные* меню программы появляется группа *Анализ* и в ней кнопка *Поиск решения* (рис. 2.12).

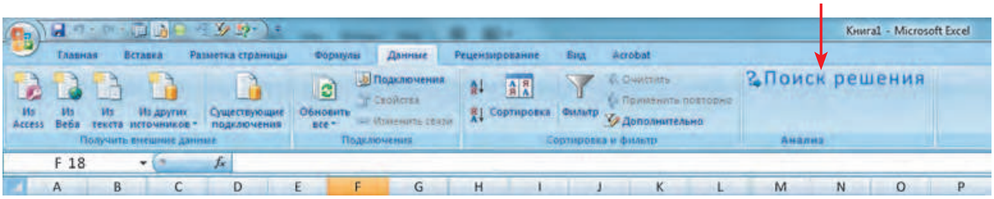


Рис. 2.12

ОБОБЩЕНИЕ НОВЫХ ЗНАНИЙ

Современные ЭТ имеют встроенные средства для оптимизации числовых моделей. В ЭТ *Microsoft Excel* таким средством является надстройка *Поиск решения*.

Перед использованием надстройки нужно проверить, что она установлена, и активировать её через настройки ЭТ. Процесс установки и активации описан в справке *Excel*.

ПРИМЕНЕНИЕ ЗНАНИЙ

Откройте в ЭТ документ, сохранённый на предыдущем занятии.

Для автоматического поиска решения выделите шапку расчётной таблицы модели и её первую строку, скопируйте их и вставьте в свободное место на листе.

Высота ведра, дм	**Диаметр ведра, дм**	**Объём ведра, дм^3 (л)**	**Площадь развёртки ведра с крышкой, дм^2**	**Масса ведра, кг**
1	3,57	10,01	31,24	0,44

Теперь вспомните, по каким переменным вы будете оптимизировать модель. Вы можете свободно изменять или высоту ведра, или его диаметр. При этом, изменяя одно из значений, вы должны поддерживать второе таким, чтобы объём ведра был равен 10 литрам. Важно не забыть ещё, что целью оптимизации является минимальная масса ведра.

Все эти три согласованных действия проделывает одновременно надстройка ЭТ *Microsoft Excel Поиск решения*.

Выполните оптимизацию при помощи надстройки *Поиск решения* и сравните результат с полученным на предыдущем занятии. Возможно, для того, чтобы увидеть разницу, вам придётся повысить выводимое ЭТ число знаков после запятой в ячейках «Высота ведра» и «Масса ведра».

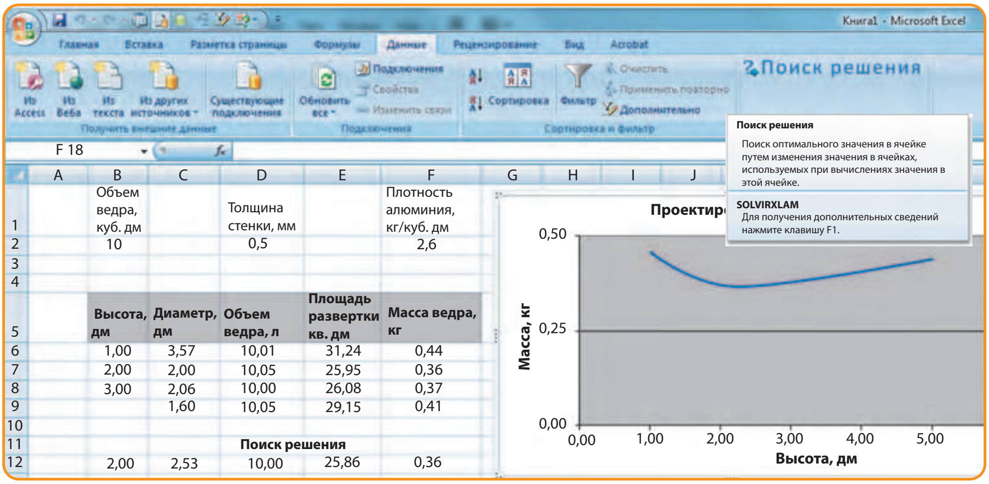
ОПЕРАЦИИ

Вызов надстройки *Поиск* решения

1. Выбрать вкладку *Данные*.

2. Если группа кнопок *Анализ* отсутствует в меню, установить и/или активизировать надстройку ЭТ *Поиск решения*.

3. В группе кнопок *Анализ* нажать кнопку *Поиск решения*.



Оптимизация модели при помощи надстройки *Поиск решения*

1. В окне *Поиск решения* нажать кнопку выбора целевой ячейки и щёлкнуть в ячейке, содержащей массу ведра.

2. Повторно нажать кнопку выбора ячейки, чтобы вернуться в настройки *Поиска решения*.

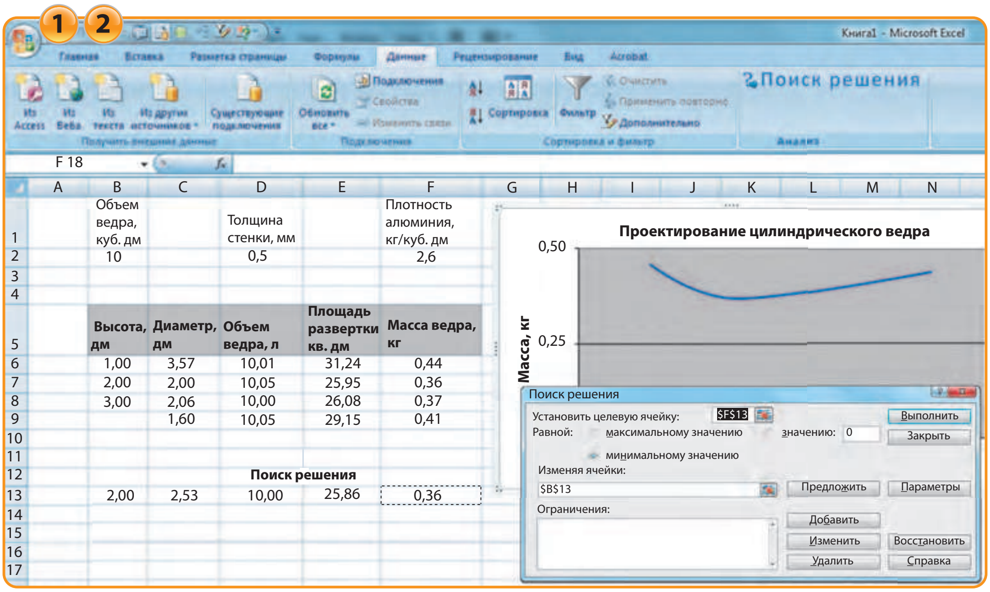
3. Нажать кнопку выбора изменяемой ячейки и щёлкнуть в ячейке, содержащей высоту ведра.

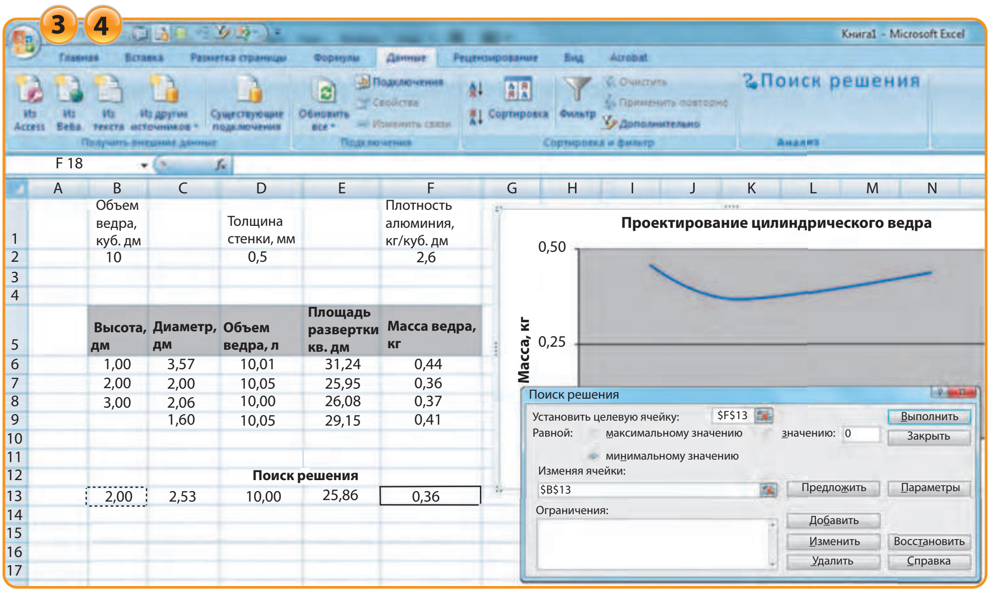
4. Повторно нажать кнопку выбора ячейки, чтобы вернуться в настройки *Поиска решения*.

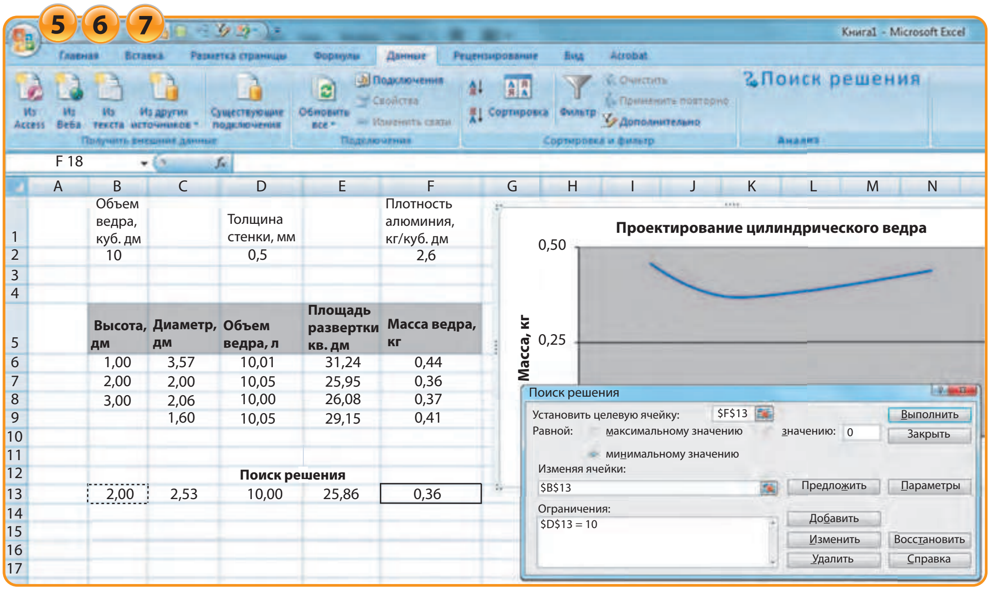
5. Нажать кнопку *Добавить* в группе *Ограничения*, чтобы выбрать ячейку с объёмом ведра.

6. Ввести после ссылки на ячейку с объёмом ведра знак «=» и значение 10. Теперь надстройка *Поиск решения* будет стремиться поддерживать объём равным 10.

7. Если все параметры оптимизации заданы, нажать кнопку *Выполнить*.


1
2
Книга1 - Microsoft Excel
Поиск решения
F 18
Объем ведра, куб. дм
Толщина стенки, мм
Плотность алюминия, кг/куб. дм
10
0,5
2,6
Высота, дм
Диаметр, дм
Объем ведра, л
Площадь развертки кв. дм
Масса ведра, кг
1,00 3,57 10,01 31,24 0,44
2,00 2,00 10,05 25,95 0,36
3,00 2,06 10,00 26,08 0,37
1,60 10,05 29,15 0,41
Поиск решения
2,00 2,53 10,00 25,86 0,36
Проектирование цилиндрического ведра
0,50
0,25
Масса, кг
Поиск решения
Установить целевую ячейку: F13
Равной: максимальному значению
значению: 0
минимальному значению
Изменяя ячейки:
B13
Ограничения:
Выполнить
Закрыть
Предложить
Параметры
Добавить
Изменить
Восстановить
Удалить
Справка


3
4
Книга1 - Microsoft Excel
Поиск решения
F 18
Объем ведра, куб. дм
Толщина стенки, мм
Плотность алюминия, кг/куб. дм
10
0,5
2,6
Высота, дм
Диаметр, дм
Объем ведра, л
Площадь развертки кв. дм
Масса ведра, кг
1,00 3,57 10,01 31,24 0,44
2,00 2,00 10,05 25,95 0,36
3,00 2,06 10,00 26,08 0,37
1,60 10,05 29,15 0,41
Поиск решения
2,00 2,53 10,00 25,86 0,36
Проектирование цилиндрического ведра
0,50
0,25
Масса, кг
Поиск решения
Установить целевую ячейку: F13
Равной: максимальному значению
значению: 0
минимальному значению
Изменяя ячейки:
B13
Ограничения:
Выполнить
Закрыть
Предложить
Параметры
Добавить
Изменить
Восстановить
Удалить
Справка



Установка округления значений в ячейках

1. Выделить ячейки, в которых надо установить разрядность значений.
2. Выбрать вкладку *Главная*.
3. В группе *Ячейки* выбрать команду *Формат*.
4. Выбрать последовательно пункты *Формат ячеек*, *Число*, *Числовой*.
5. Ввести число десятичных знаков.

Проверь себя

Задание 1

1. Известно, что первоклассники плохо запоминают таблицу умножения на 7. Создайте для них при помощи ЭТ «шпаргалку» – таблицу умножения на 7 в столбик и красиво оформите её:

1	x	7	=	?
2	x	7	=	?
...	...	...	...	...
9	x	7	=	?

2 Сохраните файл в папке и под именем, которые укажет учитель.

Задание 2

Древняя легенда приписывает создание шахмат некоему брамину. За своё изобретение он попросил у раджи незначительную на первый взгляд награду: столько пшеничных зёрен, сколько окажется на шахматной доске, если на первую клетку положить одно зерно, на вторую – два зерна, на третью – четыре зерна и т.д. до последней 64–й клетки.

1. Создайте с помощью ЭТ модель шахматной доски с зёрнами на ней из задачи о брамине и радже.
2. Рассчитайте в столбик количество зёрен на каждой клетке доски.
3. Сколько тонн зерна раджа должен выдать брамину, если 1 зерно весит 0,2 грамма?
4. Во сколько железнодорожных вагонов пришлось бы погрузить наградное зерно, если один вагон вмещает 65 тонн?
5. Сохраните файл в папке и под именем, которые укажет учитель.

ПРИМЕНЕНИЕ ЗНАНИЙ *(необходимый уровень)*

Задание 1

1. Постройте в ЭТ математическую модель прямоугольного треугольника, заданного двумя катетами и вычислите его гипотенузу и площадь.
2. Сохраните файл в папке и под именем, которые укажет учитель.

Задание 2

1. Постройте в ЭТ параметризованную математическую модель геометрической прогрессии на 100 членов с заданным основанием и знаменателем и покажите справедливость известных вам из курса математики свойств этой прогрессии.
2. Сохраните файл в папке и под именем, которые укажет учитель.

ПРИМЕНЕНИЕ ЗНАНИЙ *(повышенный уровень)*

Задание 1

Последовательность чисел Фибоначчи строится по следующим правилам:

а) первое число равно 1;
б) второе число равно 1;
в) каждое последующее число равно сумме двух предыдущих.

1. Постройте последовательность чисел Фибоначчи в столбик. Найдите сумму и среднее арифметическое первых десяти элементов последовательности.
2. Сохраните файл в папке и под именем, которые укажет учитель.

Задание 2

Будущий знаменитый математик Гаусс не отличался в школьном возрасте примерным поведением. Как-то раз строгий учитель оставил его в классе после уроков и строго приказал: «Ты будешь сидеть в классе, пока не сложишь натуральные числа от 1 до 100. А домой пойдёшь, только получив верный ответ». К удивлению учителя, Гаусс выдал верный ответ через одну минуту.

1. Сложите в столбик с помощью ЭТ натуральные числа от 1 до 100 за одну минуту.
2. Если вы можете найти правильный ответ аналитически, то проверьте правильность полученного результата.
3. Сохраните файл в папке и под именем, которые укажет учитель.

ПРИМЕНЕНИЕ ЗНАНИЙ *(максимальный уровень)*

Задание 1

1. В задаче о ведре минимальной массы (см. § 9) выразите диаметр ведра через высоту и объём, а затем подставьте его в формулу для массы. Повторите моделирование и найдите минимум без использования надстройки ЭТ *Принятие решения*.
2. Сохраните файл в папке и под именем, которые укажет учитель.

Задание 2

1. Создайте в ЭТ модель перевода десятичного числа до 1024 в двоичную систему счисления.
2. Сохраните файл в папке и под именем, которые укажет учитель.

Итоговая проверочная работа

Задание 1

1. Рассчитайте в ЭТ динамику роста популяции овец в условиях ограниченных ресурсов на небольшом горном плато в Аргентине, если возобновляемого запаса корма достаточно для выживания максимум 500 животных.
   Коэффициент роста популяции примите равным 1,5, шаг расчёта – 1 год.
2. Результат расчёта представьте в виде точечной диаграммы.
3. Сохраните файл в папке и под именем, которые укажет учитель.

Задание 2

1. Рассчитайте в ЭТ динамику роста популяции кроликов в условиях ограниченных ресурсов, приняв в качестве параметров коэффициент роста и начальную численность популяции.
   Примите максимальную численность популяции, равной 500 животных.
2. Результат расчётов представьте в виде диаграммы, отображающей численность популяции в зависимости от времени в кварталах.
3. Сохраните файл в папке и под именем, которые укажет учитель.

Задание 3

В городе с населением 100 000 человек появляются 40 инфекционных больных, что вызывает эпидемию. Предположим, что прирост больных за день пропорционален произведению числа здоровых (ещё не переболевших и не приобретших иммунитет) на число больных. Коэффициент пропорциональности k учитывает степень заразности заболевания и различные меры профилактики. Если, например, жители города будут носить марлевые повязки или сделают прививки, то этот коэффициент уменьшится.

Как будет меняться число больных в зависимости от времени?

1. Рассчитайте в ЭТ динамику развития эпидемии по следующей математической модели:

   $S_n = k \cdot H_{n-1} \cdot S_{n-1}$;
   $H_n = H_{n-1} - S_n$,
   где S_n – число заболевших в n-й день;
   S_{n-1} – число заболевших в (n–1)-й день;
   H_n – число здоровых в n-й день;
   H_{n-1} – число здоровых в (n–1)-й день;
   k – коэффициент заразности заболевания.

2. Результат расчётов представьте в виде диаграммы, отображающей число заболевших нарастающим итогом (сколько всего людей заболело с начала эпидемии) и число заболевших в данный день в зависимости от времени в днях.

Решаем жизненные задачи и работаем над проектами

Жизненная задача 1. Свободное падение

Ваша роль: конструктор запасного парашюта, способного спасти жизнь человека в затяжном прыжке, если не сработал основной парашют.

Описание. Тело массой 60 кг при падении на землю испытывает действие силы тяжести и сопротивления воздуха. Чем больше скорость тела, тем больше сила сопротивления воздуха. При движении в воздухе сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости с некоторым коэффициентом k. Примем k равным 3 кг/м, начальную скорость — 0 м/с, ускорение свободного падения – 9,81 м/с^2.

Задание. Создайте математическую модель свободного падения тела и постройте график зависимости скорости тела от времени. Определите, когда скорость падения тела станет равной 10 м/с. Сравните результат с падением тела в случае отсутствия трения.

Жизненная задача 2. Выстрел из орудия

Ваша роль: наводчик дальнобойного артиллерийского орудия.

Описание. Орудие выстреливает снаряд массой 50 кг под углом A к горизонту с начальной скоростью 500 м/с. Чем больше скорость тела, тем больше сила сопротивления воздуха. При движении в воздухе сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости с некоторым коэффициентом k. Примем k равным 3 кг/м, ускорение свободного падения – 9,81 м/с^2.

Задание. Создайте математическую модель полёта снаряда и постройте график зависимости скорости снаряда от времени. Определите дальность полёта снаряда. Сравните результат с полётом тела, брошенного под углом к горизонту в случае отсутствия трения.

Жизненная задача 3. Распространение слухов в коллективе людей

Ваша роль: аналитик-социолог.

Описание. Вы наверняка сталкивались с ситуацией, когда скандальная новость быстро облетает школу и многократно приходит к вам, обрастая иногда самыми нелепыми подробностями. При этом почти всегда существуют люди, которые этой новости не слышали.

Задание. Составьте и просчитайте математическую модель распространения слухов в коллективе людей численностью 1000 человек.

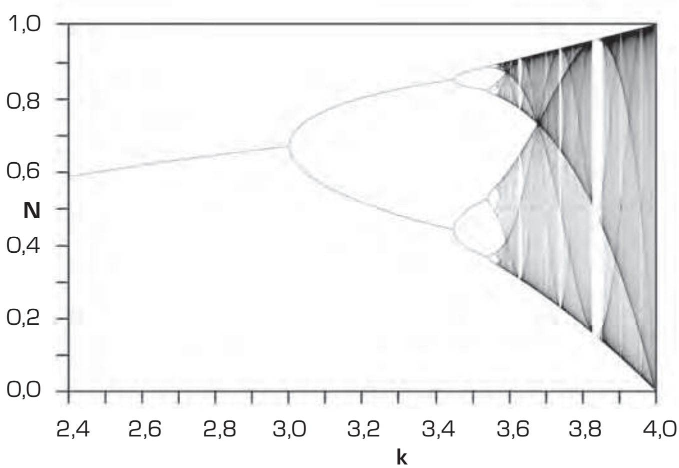
Проект 1. Исследование модели роста популяции в экосистеме с ограниченными ресурсами

Исследуйте поведение модели роста популяции с ограниченными ресурсами, разобранной в § 7.

По результатам исследования постройте так называемую бифуркационную диаграмму. По горизонтальной оси такой диаграммы откладывается значение коэффициента роста, а по вертикальной – значение численности, которого достигает популяция.

Конкретный вид диаграммы будет отличаться от приведённого ниже примера, так как наша популяция живёт по своим законам.

Указание. В качестве исходного пункта для самостоятельного поиска информации используйте статью «Логистическое отображение» из Википедии.



Проект 2. Построение модели финансовой пирамиды

Рассчитайте динамику развития финансовой пирамиды по следующей математической модели (Валерий Очков, Журнал «Компьюника», № 1, 1995):

1. Исходные данные:

число жителей в городе N = 1 000 000;
ежедневные траты (руб.) на строительство пирамиды: *Расход* = 300 000;
среднее время между покупкой и продажей акции (дни): *Время* = 30;
коэффициент ажиотажа: $KA = 10^{-7}$;
норма прибыли: *Доход* = 0,03.

2. Состояние на 1-й день:

начальный капитал (руб.): M_1 = 70 000 000;
число купивших акции в первый день: $NK_1 = 7$;
общее число купивших акции на 1-й день: $SNK_1 = 0$;
прибыль на 1-й день (руб.): $MMM_1 = M_1$.

3. Моделирование развития пирамиды:

курс продажи акций в n–й день (руб.): $P_n = 105 + 2 \cdot (n - 1)$;
курс покупки акций в n–й день (руб.): $K_n = 100 + 2 \cdot (n - 1)$;
интервал времени – 1 год: $n = 1..365$;

число акций, купленных в $(n + 1)$–й день: $NK_{n+1} = KA \cdot (N - SNK_n) \cdot SNK_n$;

общее число купленных акций на $(n + 1)$ день: $SNK_{n+1} = SNK_n + NK_n$;

число акций, проданных в $(n + 1)$–й день: NP_{n+1}=Если(n<=время;0;$NK_{n-Время}$);

денег в кассе в $(n + 1)$–й день:

$M_{n+1} = M_n + NK_n \cdot P_n - NK_n \cdot K_n - Расход$ – ЕСЛИ(M_n>0; $Доход$* M_n; 0);

заработано денег на $(n + 1)$–й день: $MMM_n + 1 = MMM_n + Доход \cdot M_n$.

Результат расчётов представьте в виде диаграммы, отображающей число покупателей акций, число их продавцов, изменение количества денег в кассе и дохода в зависимости от времени в днях.

Проект 3. Написание реферата

Подготовьте реферат на тему «Теория хаоса».

Указание. За исходный пункт при сборе материала возьмите одноимённую статью из Википедии.