Глава I

Краткий теоретический справочник

§ 1. Системы счисления

Определение. Система счисления — это способ наименования и представления чисел с помощью символов. Такие символы в любой системе счисления называются цифрами.

Определение. Алфавит системы счисления — это совокупность символов, используемых в данной системе счисления.

Все системы счисления подразделяются на два класса — позиционные и непозиционные.

В непозиционных системах счисления от положения цифры в записи числа не зависит величина, которую она обозначает.

1.1. Позиционные системы счисления

В позиционных системах счисления величина, обозначаемая цифрой в записи числа, зависит от её позиции. Количество различных цифр p, используемых в позиционной системе, определяет название системы счисления и называется основанием p-й системы счисления. Например, система счисления, в основном применяемая в современной математике, является позиционной десятичной системой, её основание равно десяти.

Любое число N в позиционной системе счисления с основанием p может быть представлено в виде многочлена от p:

$N = a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \cdots a_1 p^1 + a_0 p^0 + a_{-1} p^{-1} + a_{-2} p^{-2} + \cdots,$

где N — число, p — основание системы счисления ($p > 1$), a_i — цифры числа (коэффициенты при степенях p).

Числа в p-й системе счисления записывают в виде последовательности цифр:

$N = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \cdots .$

Запятая в последовательности отделяет целую часть числа от дробной (коэффициенты при неотрицательных степенях от коэффициентов при отрицательных степенях).

1.1.1. Двоичная система счисления

В двоичной системе используются две цифры: 0 и 1. В этой системе любое число может быть представлено в виде

$N = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots$, где a_i принимает значения либо 0, либо 1. Эта запись соответствует сумме степеней числа 2, взятых с указанными коэффициентами:

$N = a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + \dots a_1 2^1 + a_0 2^0 + a_{-1} 2^{-1} + a_{-2} 2^{-2} + \dots$.

Например,

$1011101,01 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$.

1.1.2. Восьмеричная система счисления

В восьмеричной системе используется восемь цифр — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Число N в восьмеричной системе счисления может быть представлено в виде

$N = a_k 8^k + a_{k-1} 8^{k-1} + \dots a_1 8^1 + a_0 8^0 + a_{-1} 8^{-1} + a_{-2} 8^{-2} + \dots$.

Например,

$63401,1 = 6 \cdot 8^4 + 3 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 + 1 \cdot 8^{-1}$.

1.1.3. Шестнадцатеричная система счисления

Для обозначения цифр в шестнадцатеричной системе используется десять цифр — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и латинские буквы — A (10), B (11), C (12), D (13), E (14) и F (15).

Число N в шестнадцатеричной системе счисления может быть представлено в виде

$N = a_k 16^k + a_{k-1} 16^{k-1} + \dots a_1 16^1 + a_0 16^0 + a_{-1} 16^{-1} + a_{-2} 16^{-2} + \dots$.

Например,

$A0D4 = 10 \cdot 16^3 + 0 \cdot 16^2 + 13 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0$.

1.2. Перевод чисел в десятичную систему счисления

Для того чтобы перевести число в десятичную систему, необходимо составить сумму степенного ряда с основанием системы, в которой записано число, а затем найти значение этой суммы.

Пример 1.1. Переведите число 110110, 01 из двоичной системы в десятичную.

Решение. $110110,01_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 32 + 16 + 4 + 2 + 0{,}25 = 54{,}25_{10}$.

Ответ: $54{,}25_{10}$.

Пример 1.2. Переведите число 206,4 из восьмеричной системы в десятичную.

Решение. $206{,}4_8 = 2{\cdot}8^2{+}0{\cdot}8^1{+}6{\cdot}8^0{+}4{\cdot}8^{-1} == 128{+}6{+}0{,}5 = 134{,}5_{10}$.

Ответ: $134{,}5_{10}$.

Пример 1.3. Переведите число $A2F$,4 из шестнадцатеричной системы в десятичную.

Решение. $A2F{,}4_{16} = 10 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 + 4 \cdot 16^{-1} =$
$= 2560 + 32 + 15 + 0{,}25 = 2607{,}25_{10}$.

Ответ: $2607{,}25_{10}$.

1.3. Перевод чисел из десятичной системы счисления

Способ 1.

Выполнить действия по следующему алгоритму:

1. Представить десятичное число в виде:

$N = a \cdot p^k + m,$

где p — основание системы счисления ($p > 1$), $a(a < p)$ и k — наибольшие числа, при которых $a \cdot p^k < N$, m — остаток от деления N на $a \cdot p^k$.

2. Если $m > p$, выполнить действия п. 1 для числа m.

3. Если $k \neq 0$, в k-й позиции числа записать соответствующий коэффициент a. Если $k = 0$, то в k-й позиции числа записать 0. Если $m \neq 0$, записать m в нулевой позиции.

Способ 2.

Выполнить последовательное деление десятичного числа и затем получаемых целых частных на основание той системы, в которую оно переводится, до тех пор, пока не получится частное, меньшее делителя. Число в новой системе записывается в виде остатков от деления, начиная с последнего.

Пример 1.4. Переведите число 344 из десятичной системы в двоичную.

Решение.

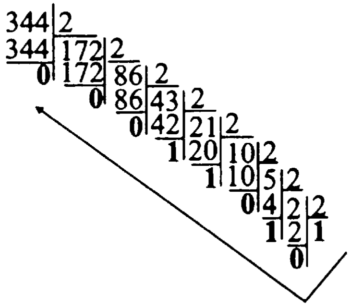
Способ 1.

$344 = 2^8 + 88;\ 88 = 2^6 + 24;\ 24 = 2^4 + 8; 8 = 2^3$.

Позиция	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Коэффициент	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**

Ответ: 101011000_2.

Способ 2.



Ответ: 101011000_2.

Пример 1.5. Переведите число 936 из десятичной системы в шестнадцатеричную.

Решение.

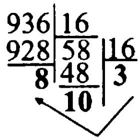
Способ 1.

$936 = 3 \cdot 16^2 + 168;\ 168 = 10 \cdot 16^1 + 8.$

Позиция	2	1	0
Коэффициент	**3**	**A**	**8**

Ответ: $3A8_{16}$.

Способ 2.



Ответ: $3A8_{16}$.

1.3.1. Перевод правильной десятичной дроби из десятичной системы счисления

Для того чтобы перевести правильную десятичную дробь из десятичной системы счисления в другую, необходимо последовательно умножать эту дробь, а затем получаемые дробные части на основание той системы, в которую она переводится.

Умножение производится до тех пор, пока дробная часть не станет равной нулю или будет достигнута требуемая точность.

В новой системе дробь записывается в виде целых частей произведений, начиная с первого.

Пример 1.6. Переведите число 0,532 из десятичной системы в двоичную с точностью до тысячных.

Решение.

$$\begin{array}{r|r} 0, & \times\,532 \\ & 2 \\ \cline{2-2} 1, & \times\,064 \\ & 2 \\ \cline{2-2} 0, & \times\,128 \\ & 2 \\ \cline{2-2} 0, & 256 \end{array}$$

Ответ: $0{,}100_2$.

Пример 1.7. Переведите число 0,974 из десятичной системы в шестнадцатеричную с точностью до тысячных.

Решение.

$$\begin{array}{r|r} 0, & \times\,974 \\ & 16 \\ \cline{2-2} 15, & \times\,584 \\ & 16 \\ \cline{2-2} 9, & \times\,344 \\ & 16 \\ \cline{2-2} 5, & 504 \end{array}$$

Ответ: $0{,}F95_{16}$.

1.3.2. Перевод смешанного числа из десятичной системы счисления

Для того чтобы перевести число, содержащее и целую, и дробную части, из десятичной системы счисления в другую, необходимо сначала перевести его целую часть, затем отдельно — дробную часть. В ответе перед запятой следует записать целую часть, а после запятой — дробную часть.

Пример 1.8. Переведите число 344,532 из десятичной системы в двоичную с точностью до тысячных.

Решение. Переводим целую часть числа (см. пример 1.4). Получаем $344_{10} = 101011000_2$. Переводим с указанной точностью его дробную часть (см. пример 1.6). Получаем $0{,}532_{10} = 0{,}100_2$. Дописываем после целой части дробную: $344{,}532_{10} = 101011000{,}100_2$.

Ответ: $101011000{,}100_2$.

Пример 1.9. Переведите число 936,974 из десятичной системы в шестнадцатеричную с точностью до тысячных.

Решение. Переводим целую часть числа (см. пример 1.5). Получаем: $936_{10} = 3A8_{16}$.

Переводим с указанной точностью дробную часть (см. пример 1.7). Получаем: $0{,}974_{10} = 0{,}F95_{16}$.

Дописываем после целой части дробную:
$936{,}974_{10} = 3A8{,}F95_{16}$.

Ответ: $3A8{,}F95_{16}$.

1.4. Перевод чисел из двоичной системы счисления в восьмеричную, шестнадцатеричную и обратно

1.4.1. Перевод чисел из двоичной системы счисления в восьмеричную и обратно

Для того чтобы перевести число из двоичной системы в восьмеричную, следует, двигаясь от запятой влево и вправо, разбить двоичное число на группы по три разряда, дополняя при необходимости нулями крайние левую и правую группы. Затем триаду заменить соответствующей восьмеричной цифрой.

После перевода числа из двоичной системы счисления в восьмеричную количество цифр уменьшится в 3 раза.

Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7
Триада	000	001	010	011	100	101	110	111

Пример 1.10. Переведите число 10011001111,0101 из двоичной системы в восьмеричную.

Решение.

$$\underbrace{010}_{2}\,\underbrace{011}_{3}\,\underbrace{001}_{1}\,\underbrace{111}_{7}\,,\underbrace{010}_{2}\,\underbrace{100}_{4} = 2317{,}24_8$$

Ответ: $2317{,}24_8$.

Для перевода числа из восьмеричной системы в двоичную достаточно заменить каждую цифру этого числа соответствующим трёхразрядным двоичным числом (триадой), при этом отбрасывают незначащие нули в старших и младших (после запятой) разрядах.

После перевода числа из восьмеричной системы в двоичную количество цифр увеличивается в 3 раза.

Пример 1.11. Переведите число 204,4 из восьмеричной системы в двоичную.

Решение.

$$\underbrace{2}_{010}\quad\underbrace{0}_{000}\quad\underbrace{4}_{100}\ ,\ \underbrace{4}_{100} = 10000100{,}1_2$$

Ответ: $10000100{,}1_2$.

1.4.2. Перевод чисел из двоичной системы счисления в шестнадцатеричную и обратно

Для того чтобы перевести число из двоичной системы в шестнадцатеричную, следует, двигаясь от запятой влево и вправо, разбить двоичное число на группы по четыре разряда, дополняя при необходимости нулями крайние левую и правую группы. Затем тетраду заменить соответствующей шестнадцатеричной цифрой.

После перевода числа из двоичной системы счисления в шестнадцатеричную количество цифр уменьшится в 4 раза.

Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7
Тетрада	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
Цифра	8	9	A	B	C	D	E	F
Тетрада	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Пример 1.12. Переведите число 10111111011,100011 из двоичной системы в шестнадцатеричную.

Решение.

$$\underbrace{0101}_{5}\ \underbrace{1111}_{F}\ \underbrace{1011}_{B}\ ,\ \underbrace{1000}_{8}\ \underbrace{1100}_{C} = 5FB,8C_{16}$$

Ответ: $5FB,8C_{16}$.

Для перевода числа из шестнадцатеричной системы в двоичную достаточно заменить каждую цифру этого числа соответствующим четырёхразрядным двоичным числом (тетрадой), при этом отбрасывают незначащие нули в старших и младших разрядах.

После перевода числа из шестнадцатеричной системы в двоичную количество цифр увеличится в 4 раза.

Пример 1.13. Переведите число 6C3,A из шестнадцатеричной системы в двоичную.

Решение.

$$\underbrace{6}_{0110}\ \underbrace{C}_{1100}\ \underbrace{3}_{0011}\ ,\ \underbrace{A}_{1010} = 11011000011,101_2$$

Ответ: $11011000011,101_2$.

1.5. Перевод чисел из восьмеричной системы счисления в шестнадцатеричную и обратно

Перевод из восьмеричной системы счисления в шестнадцатеричную и обратно осуществляется через двоичную систему с помощью триад и тетрад.

Пример 1.14. Переведите число 135,14 из восьмеричной системы счисления в шестнадцатеричную.

Решение.

$$\underbrace{1}_{001}\ \underbrace{3}_{011}\ \underbrace{5}_{101}\ ,\ \underbrace{1}_{001}\ \underbrace{4}_{100} = 1011101{,}0011_2 = \underbrace{0101}_{5}\ \underbrace{1101}_{D}\ ,\underbrace{0011}_{3} = 5D{,}3_{16}$$

Ответ: $5D{,}3_{16}$.

Пример 1.15. 1. Запишите число $5731{,}56_8$ в шестнадцатеричной системе счисления.

Решение. $5731{,}56_8 = 101111011001{,}101110_2 =$
$= 101111011001{,}10111000_2 = BD9{,}B8_{16}$.

Ответ: $BD9{,}B8_{16}$.