§ 12
Арифметические операции в позиционных системах счисления

Арифметические операции в позиционных системах счисления с основанием q выполняются по правилам, аналогичным правилам, действующим в десятичной системе счисления.

В начальной школе для обучения детей счёту используют таблицы сложения и умножения. Подобные таблицы можно составить для любой позиционной системы счисления.

12.1. Сложение чисел в системе счисления с основанием q

Рассмотрите примеры таблиц сложения в троичной (табл. 3.2), восьмеричной (табл. 3.4) и шестнадцатеричной (табл. 3.3) системах счисления.

Таблица 3.2

Сложение в троичной системе счисления

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

Таблица 3.3

Сложение в шестнадцатеричной системе счисления

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

Таблица 3.4

Сложение в восьмеричной системе счисления

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Чтобы в системе счисления с основанием q получить сумму S двух чисел A и B, надо просуммировать образующие их цифры по разрядам i справа налево:

- если $a_i + b_i < q$, то $s_i = a_i + b_i$, старший $(i + 1)$-й разряд не изменяется;
- если $a_i + b_i \geq q$, то $s_i = a_i + b_i - q$, старший $(i + 1)$-й разряд увеличивается на 1.

Примеры:

$$+\begin{array}{r} 100202_3 \\ 10102_3 \\ \hline 111011_3 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} 12345_8 \\ 2443_8 \\ \hline 15010_8 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} \mathrm{FE12A9}_{16} \\ 23528_{16} \\ \hline \mathrm{10047D1}_{16} \end{array}$$

12.2. Вычитание чисел в системе счисления с основанием q

Чтобы в системе счисления с основанием q получить разность R двух чисел A и B, надо вычислить разности образующих их цифр по разрядам i справа налево:

- если $a_i \geq b_i$, то $r_i = a_i - b_i$, старший $(i + 1)$-й разряд не изменяется;
- если $a_i < b_i$, то $r_i = a_i - b_i + q$, старший $(i + 1)$-й разряд уменьшается на 1 (выполняется заём в старшем разряде).

Примеры:

$$\begin{array}{r} 100110_3 \\ -\ 10101_3 \\ \hline 20002_3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17345_8 \\ -\ 2443_8 \\ \hline 14702_8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} FE12A9_{16} \\ -\ 23528_{16} \\ \hline FBDD81_{16} \end{array}$$

12.3. Умножение чисел в системе счисления с основанием *q*

Рассмотрите примеры таблиц умножения в троичной (табл. 3.5), восьмеричной (табл. 3.6) и шестнадцатеричной (табл. 3.7) системах счисления.

Таблица 3.5

Умножение в троичной системе счисления

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Таблица 3.6

Умножение в восьмеричной системе счисления

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Таблица 3.7

Умножение в шестнадцатеричной системе счисления

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

Рассмотрим алгоритм умножения многозначного числа на однозначное.

Чтобы в системе счисления с основанием q получить произведение M многозначного числа A и однозначного числа b, надо вычислить произведения b и цифр, образующих число A по разрядам i справа налево:

- если $a_i \cdot b < q$, то $m_i = a_i \cdot b$, старший $(i + 1)$-й разряд не изменяется;
- если $a_i \cdot b \geq q$, то $m_i = a_i \cdot b \mod q$, старший $(i + 1)$-й разряд увеличивается на $a_i \cdot b$ div q (где div — операция целочисленного деления).

Примеры:

$$\begin{array}{r} 1\;\;1 \\ \times\; 202_3 \\ 2_3 \\ \hline 1111_3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,2\,3 \\ \times\; 246_8 \\ 5_8 \\ \hline 1476_8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\;7\;5\;1\phantom{_{16}} \\ \times\; AD93_{16} \\ 9_{16} \\ \hline 61A2B_{16} \end{array}$$

Умножение многозначного числа на многозначное число выполняется столбиком. При этом два множителя располагаются один под другим так, чтобы разряды чисел совпадали (находились в одном столбце).

Если один из множителей или оба множителя оканчиваются нулями, то числа записываются так, чтобы в одном столбце оказались их самые младшие разряды с цифрами, отличными от нуля. Нули переносятся в итоговое произведение, а в поле записи поэтапных произведений не заносятся.

Поэтапные (разрядные) произведения складываются по разрядам и под чертой записывается результат.

Примеры:

$$\begin{array}{r} 2020_3 \\ \times\; 210_3 \\ \hline 202_3 \\ +\;1111_3 \\ \hline 1201200_3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2460_8 \\ \times\; 15_8 \\ \hline 1476_8 \\ +\;246_8 \\ \hline 41560_8 \end{array}$$

12.4. Деление чисел в системе счисления с основанием q

Деление нельзя свести к поразрядным операциям над цифрами, составляющими число.

Деление чисел в системе счисления с произвольным основанием q выполняется так же, как и в десятичной системе счисления.

Пример:

$$\begin{array}{l|l} -\;2640_8 & 17_8 \\ 17_8 & \hline 140_8 \\ \hline -74_8 & \\ 74_8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

12.5. Двоичная арифметика

Арифметика двоичной системы счисления основывается на использовании следующих таблиц сложения, вычитания и умножения:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

–	0	1
0	0	$\bar{1}1$
1	1	0

×	0	1
0	0	1
1	1	1

Рассмотрим несколько простых, но очень важных примеров на сложение и вычитание в двоичной системе счисления.

$$\begin{array}{r} 111111 \\ +\ 111111_2 \\ 1 \\ \hline 1000000_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 01111 \\ -\ 10000_2 \\ 1 \\ \hline 1111 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 0111 \\ 01 \\ -\ 101010_2 \\ 111_2 \\ \hline 100011_2 \end{array}$$

Пример 1. Найдём количество единиц в двоичной записи числа, являющегося результатом десятичного выражения $2^{4000} + 4^{2016} + 2^{2018} - 8^{600} + 6$.

Представим все операнды исходного выражения в виде степеней двойки:

$4^{2016} = (2 \cdot 2)^{2016} = (2^2)^{2016} = 2^{2 \cdot 2016} = 2^{4032}$,
$8^{600} = (2^3)^{600} = 2^{1800}$,
$6 = 4 + 2 = 2^2 + 2^1$.

Исходное выражение примет вид:

$$2^{4000} + 4^{2016} + 2^{2018} - 8^{600} + 6 = 2^{4000} + 2^{4032} + 2^{2018} - 2^{1800} + 2^2 + 2^1.$$

Перепишем выражение в порядке убывания степеней:

$$2^{4032} + 2^{4000} + 2^{2018} - 2^{1800} + 2^2 + 2^1.$$

Для работы с десятичными числами вида 2^n полезно иметь в виду следующие закономерности в их двоичной записи:

$2^1 = 10 = 1 + 1;$
$2^2 = 100 = 11 + 1;$
$2^3 = 1000 = 111 + 1;$
$2^4 = 10000 = 1111 + 1$ и т. д.

В общем виде:

$$2^n = 1\underbrace{0\ldots0}_{n} = \underbrace{1\ldots1}_{n} + 1.$$

Для натуральных n и m таких, что $n > m$, получаем:

$$2^n + 2^m = 1\underbrace{0\ldots0}_{n} + 1\underbrace{0\ldots0}_{m} = 1\underbrace{0\ldots0}_{n-m-1}1\underbrace{0\ldots0}_{m},$$

$$2^n - 2^m = \underbrace{1\ldots1}_{n} + 1 - (\underbrace{1\ldots1}_{m} + 1) = \underbrace{1\ldots1}_{n} - \underbrace{1\ldots1}_{m} = \underbrace{1\ldots1}_{n-m}\underbrace{0\ldots0}_{m}.$$

Эти соотношения позволят нам подсчитать количество единиц в нашем выражении, не прибегая к его вычислению.

Действительно, двоичные представления чисел 2^{4032} и 2^{4000} внесут в двоичное представление суммы по одной единице. Разность $2^{2018} - 2^{1800}$ в двоичной записи представляет собой цепочку из 218 единиц и следующих за ними 1800 нулей. Слагаемые 2^2 и 2^1 дают ещё 2 единицы.

Итого: $1 + 1 + 218 + 1 + 1 = 222$.

Пример 2. Найдём количество цифр в восьмеричной записи числа, являющегося результатом десятичного выражения $2^{299} + 2^{298} + 2^{297} + 2^{296}$.

Двоичное представление исходного числа имеет вид: $1111\underbrace{0\ldots0}_{296}$. Всего в этой записи 300 двоичных символов. При переводе двоичного числа в восьмеричную систему счисления каждая триада исходного числа заменяется восьмеричной цифрой. Следовательно, восьмеричное представление исходного числа состоит из 100 цифр.

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Арифметические операции в позиционных системах счисления с основанием q выполняются по правилам, аналогичным правилам, действующим в десятичной системе счисления.

Если необходимо вычислить значение арифметического выражения, операнды которого представлены в различных системах счисления, можно:

1) все операнды представить в привычной нам десятичной системе счисления;
2) вычислить результат выражения в десятичной системе счисления;
3) перевести результат в требуемую систему счисления.

Для работы с десятичными числами вида 2^n полезно иметь в виду следующие закономерности в их двоичной записи:

$$2^n = 1\underbrace{0\ldots0}_{n} = \underbrace{1\ldots1}_{n} + 1.$$

Для натуральных n и m таких, что $n > m$, получаем:

$$2^n + 2^m = 1\underbrace{0\ldots0}_{n} + 1\underbrace{0\ldots0}_{m} = 1\underbrace{0\ldots0}_{n-m-1}1\underbrace{0\ldots0}_{m},$$

$$2^n - 2^m = \underbrace{1\ldots1}_{n} + 1 - (\underbrace{1\ldots1}_{m} + 1) = \underbrace{1\ldots1}_{n} - \underbrace{1\ldots1}_{m} = \underbrace{1\ldots1}_{n-m}\underbrace{0\ldots0}_{m}.$$

Вопросы и задания

1. Выполните арифметические операции над двоичными числами:
   1) 10010011 + 101101;
   2) 110010,11 + 110110,11;
   3) 110101110 – 10111111;
   4) 11110 · 100010;
   5) 11111100101 : 101011.

   Для того чтобы убедиться в правильности полученных результатов, найдите десятичные эквиваленты операндов и результата.
2. Какое число следует за каждым из данных:
   1) 223_4; 2) 677_8; 3) 2222_3; 4) 1001_2?

   Ответ для каждого числа дайте в указанной и десятичной системах счисления.
3. Какое число предшествует каждому из данных:
   1) 222_3; 2) 1000_5; 3) 233_4; 4) 1001_2?

   Ответ для каждого числа дайте в указанной и десятичной системах счисления.
4. Сумму восьмеричных чисел 17 + 1700 + 170000 + 17000000 + + 1700000000 перевели в шестнадцатеричную систему счисления. Найдите в шестнадцатеричной записи числа, равного этой сумме, пятую цифру слева.
5. Вычислите значение выражения:
   1) $(1111101_2 + AF_{16}) : 36_8$;
   2) $125_8 + 11101_2 \cdot A2_{16} - 1417_8$.

6. Найдите среднее арифметическое следующих чисел:
   1) 10010110_2, 1100100_2 и 110010_2;
   2) 226_8, 64_{16} и 62_8.
7. В примерах на сложение восстановите неизвестные цифры, обозначенные знаком вопроса, определив вначале, в какой системе счисления эти числа записаны.

1) $\begin{array}{r} 2?21 \\ +\,123? \\ \hline ?203 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 5?55 \\ +\,?327 \\ \hline ?16?4 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 21?02 \\ +\,?1212 \\ \hline ?2?021 \end{array}$

8. Даны 4 целых числа, записанные в двоичной системе счисления:
   11000000, 11000011, 11011001, 11011111.
   Сколько среди них чисел, больших, чем $AB_{16} + 25_8$?
9. Сколько единиц в двоичной записи числа $4^{2014} + 2^{2015} - 9$?
*10. Сколько единиц в двоичной записи числа $8^{4024} - 4^{1605} + 2^{1024} - 126$?
11. Сколько цифр в восьмеричной записи числа $2^{1024} + 2^{1026}$?
12. Какая первая цифра в шестнадцатеричной записи числа $2^{1024} + 2^{1025}$?