§ 11
Перевод чисел из одной позиционной системы счисления в другую

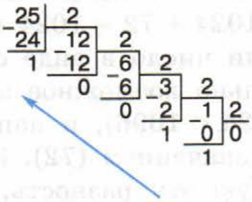
11.1. Перевод целого десятичного числа в систему счисления с основанием *q*

Для перевода целого десятичного числа в систему счисления с основанием q следует:

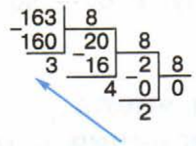
1) последовательно выполнять деление данного числа и получаемых целых частных на основание новой системы счисления до тех пор, пока не получится частное, равное нулю;
2) полученные остатки, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие алфавиту новой системы счисления;
3) составить число в новой системе счисления, записывая его, начиная с последнего остатка.

Рассмотрим примеры перевода целых десятичных чисел в 2-ичную, 8-ричную и 16-ричную системы счисления.

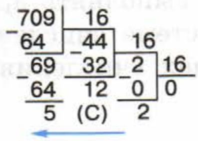
Пример 1. $25_{10} = 11001_2$



Пример 2. $163_{10} = 243_8$



Пример 3. $709_{10} = 2C5_{16}$



Пример 4. **Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись десятичного числа 22 оканчивается на 4.**

Поскольку запись числа в системе счисления с основанием q заканчивается на 4, остаток от деления числа 22 на q равен 4: $22 \bmod q = 4$[1]. Следовательно, $18 \bmod q = 0$. Это верно для $q \in \{18, 9, 6, 3, 2, 1\}$.

Так как в новой системе счисления запись числа оканчивается на 4, то $q > 4$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют основания: 18, 9 и 6.

11.2. Перевод целого десятичного числа в двоичную систему счисления

Перевод целого десятичного числа, безусловно, может осуществляться по рассмотренному выше универсальному алгоритму. Но для чисел в пределах десяти тысяч (особенно если число

1) Операция mod — вычисление остатка от целочисленного деления.

немного больше некоторой степени двойки) бывает удобно снова воспользоваться таблицей степеней двойки.

Например: $1096_{10} = 1024 + 72 = 1024 + 64 + 8 = 10001001000_2$.

Здесь мы представили число в виде суммы степеней двойки: сначала взяли максимально возможное значение, не превышающее исходное число ($1024 < 1096$), и нашли разность между исходным числом и этим значением (72). Затем выписали степень двойки, не превышающую эту разность, и т. д. Когда исходное число было представлено в виде суммы, мы построили его двоичное представление, записав 1 в разрядах, соответствующих слагаемым, вошедшим в сумму, и 0 — во всех остальных разрядах.

11.3. Перевод целого числа из системы счисления с основанием *p* в систему счисления с основанием *q*

Каждый из нас может выполнять арифметические операции в привычной десятичной системе счисления. Выполнять такие же операции в других системах счисления человеку непривычно, а поэтому и неудобно.

Для того чтобы перевести целое число из системы счисления с основанием p в систему счисления с основанием q, достаточно:

1) основание новой системы счисления выразить в исходной системе счисления и все последующие действия производить в исходной системе счисления;
2) последовательно выполнять деление данного числа и получаемых целых частных на основание новой системы счисления до тех пор, пока не получится частное, равное нулю;
3) полученные остатки, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие алфавиту новой системы счисления;
4) составить число в новой системе счисления, записывая его, начиная с последнего остатка.

При необходимости перевести целое число из системы счисления с основанием p в систему счисления с основанием q можно попытаться воспользоваться описанным выше алгоритмом. Другой способ состоит в том, чтобы свести всё к хорошо знакомым действиям в десятичной системе счисления: перевести исходное число в десятичную систему счисления, после чего полученное десятичное число представить в требуемой системе счисления (рис. 3.3).

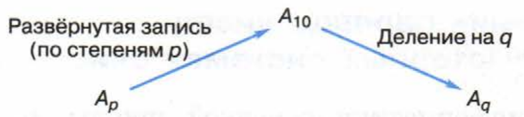


Рис. 3.3. Схема перевода целого числа из системы счисления с основанием p в систему счисления с основанием q через десятичную систему счисления

Пример 5. $1234_5 = 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 194_{10} = 522_6$.

11.4. Перевод конечной десятичной дроби в систему счисления с основанием q

Для перевода конечной десятичной дроби в систему счисления с основанием q следует:

1) последовательно умножать данное число и получаемые дробные части произведения на основание новой системы счисления до тех пор, пока дробная часть произведения не станет равна нулю или не будет достигнута требуемая точность представления числа;
2) полученные целые части произведений, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие алфавиту новой системы счисления;
3) составить дробную часть числа в новой системе счисления, начиная с целой части первого произведения.

Пример 6. Переведём число $0{,}1875_{10}$ в двоичную систему счисления.

Выполним умножение числа $0{,}1875_{10}$ на 2:

Операция	Результат
$0{,}1875 \cdot 2 =$	**0**,3750 (1)
$0{,}3750 \cdot 2 =$	**0**,7500 (2)
$0{,}7500 \cdot 2 =$	**1**,5000 (3)
$0{,}5000 \cdot 2 =$	**1**,0000 (4)

Здесь жирным выделены цифры, участвующие в двоичном представлении дроби, а в скобках указан номер цифры в дроби.

$$0{,}1875_{10} = 0{,}0011_2.$$

11.5. «Быстрый» перевод чисел в компьютерных системах счисления

Из курса информатики основной школы вы знаете, что в компьютерных науках широко используются двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления, благодаря чему их называют «компьютерными». Между основаниями этих систем существует очевидная связь: $16 = 2^4$, $8 = 2^3$.

Способ «быстрого» перевода основан на том, что каждой цифре числа в системе счисления, основание которой q кратно степени двойки, соответствует число, состоящее из n ($q = 2^n$) цифр в двоичной системе счисления. Замена восьмеричных цифр двоичными тройками (триадами) и шестнадцатеричных цифр двоичными четвёрками (тетрадами) позволяет осуществлять быстрый перевод между этими системами счисления, не прибегая к арифметическим операциям.

Восьмеричная цифра	Двоичная триада
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Шестнадцатеричная цифра	Двоичная тетрада
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Для того чтобы целое двоичное число записать в системе счисления с основанием $q = 2^n$, достаточно:

1) данное двоичное число разбить справа налево на группы по n цифр в каждой;
2) если в последней левой группе окажется меньше n разрядов, то её надо дополнить слева нулями до нужного числа разрядов;
3) рассмотреть каждую группу как n-разрядное двоичное число и записать её соответствующей цифрой системы счисления с основанием $q = 2^n$.

Пример 7. Переведём число 1101010011_2 в восьмеричную систему счисления.

1101010011_2 — исходное число;

↓

11.010.100.111 — выделяем триады;

↓

011.010.100.111 — дополняем левую группу слева нулём;

↓

3 . 2 . 4 . 7 — выписываем восьмеричные цифры;

↓

3247_8 — результат.

Пример 8. Переведём число $16AC_{16}$ в двоичную систему счисления.

$16AC_{16}$ — исходное число;

↓

0001.0110.1010.1100 — заменяем каждую цифру тетрадой;

↓

1.0110.1010.1100 — убираем слева незначащие нули;

↓

1011010101100_2 — результат.

Через двоичную систему счисления можно проводить быстрые переводы из восьмеричной системы счисления в шестнадцатеричную и обратно (рис. 3.4)

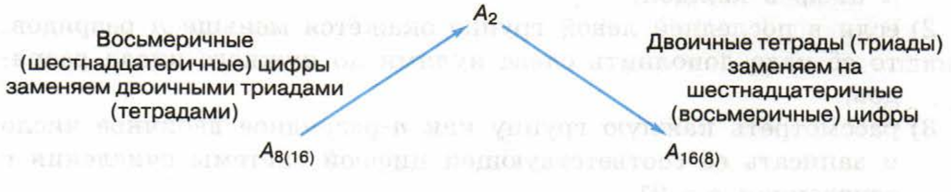


Рис. 3.4. Схема перевода целых чисел из восьмеричной системы счисления в шестнадцатеричную и обратно через двоичную систему счисления

<u>**Пример 9.**</u> Выполним перевод восьмеричного $67\ 252_8$ числа в шестнадцатеричную систему счисления.

67252_8 — исходное число;

↓

110.111.010.101.010 — заменяем каждую цифру триадой;

↓

110.1110.1010.1010 — разбиваем двоичную строку справа налево на тетрады;

↓

0110.1110.1010.1010 — дополняем левую группу слева нулём;

↓

6 . E . A . A — выписываем шестнадцатеричные цифры;

↓

$6EAA_{16}$ — результат.

Аналогичные алгоритмы быстрого перевода существуют и для дробных чисел. Для того чтобы записать правильную двоичную дробь в системе счисления с основанием $q = 2^n$, достаточно:

1) двоичное число разбить слева направо на группы по n цифр в каждой;
2) если в последней правой группе окажется меньше n разрядов, то её надо дополнить справа нулями до нужного числа разрядов;

3) рассмотреть каждую группу как n-разрядное двоичное число и записать её соответствующей цифрой системы счисления с основанием $q = 2^n$.

Пример 10. Число $0{,}101100011_2$ заменим равным ему шестнадцатеричным числом.

$0{,}101100011_2$ — исходное число;

↓

0,1011.0001.1 — разбиваем двоичную строку слева направо на тетрады;

↓

0,1011.0001.1000 — дополняем правую группу справа нулями;

↓

0,B . 1 . 8 — выписываем шестнадцатеричные цифры;

↓

$0{,}B18_{16}$ — результат.

Попытайтесь самостоятельно сформулировать алгоритм быстрого перевода произвольного двоичного числа в восьмеричную систему счисления. Примените алгоритм к числу $1110100100{,}11010010_2$.

Пример 11. Выясним, сколько значащих нулей в двоичной записи восьмеричного числа 1601_8.

Для ответа на этот вопрос достаточно знать двоичные триады, соответствующие восьмеричным цифрам от 0 до 7 и выполнить «быстрый» перевод числа 1601_8 в двоичную систему счисления:

$$1601_8 = 001\ 110\ 000\ 001_2 = 1110000001_2.$$

В двоичной записи 6 значащих нулей, а первые два нуля являются незначащими и не учитываются.

Пример 12. Среди четырёхзначных шестнадцатеричных чисел, двоичная запись которых содержит ровно 7 единиц, найдём:

1) наименьшее число;
2) наибольшее число.

Наименьшее четырёхзначное шестнадцатеричное число — это $1000_{16} = 0001\ 0000\ 0000\ 0000_2$, и его двоичное представление содержит всего одну единицу. Чтобы получить наименьшее число, удовлетворяющее условию задачи, оставшиеся шесть единиц следует разместить в самых младших разрядах. Получим $1\,0000\,0011\,1111_2 = 103F_{16}$. Чтобы получить наибольшее число, удовлетворяющее условию задачи, оставшиеся шесть единиц следует разместить в самых старших разрядах. Получим $1111\,1110\,0000\,0000_2 = FE00_{16}$.

А сколько всего таких четырёхзначных шестнадцатеричных чисел, двоичная запись которых содержит ровно 7 единиц?

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Для перевода целого десятичного числа в систему счисления с основанием q следует:

1) последовательно выполнять деление данного числа и получаемых целых частных на основание новой системы счисления до тех пор, пока не получится частное, равное нулю;
2) полученные остатки, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие алфавиту новой системы счисления;
3) составить число в новой системе счисления, записывая его, начиная с последнего остатка.

В компьютерных науках широко используются двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления, благодаря чему их называют «компьютерными». Между основаниями этих систем существует очевидная связь: $16 = 2^4$, $8 = 2^3$.

Если основание системы счисления q кратно степени двойки ($q = 2^n$), то любое число в этой системе счисления можно «быстро» перевести в двоичную систему счисления, выписав последовательно двоичные коды каждой из цифр, образующих исходное число. Замена восьмеричных цифр двоичными тройками (триадами) и шестнадцатеричных цифр двоичными четвёрками (тетрадами) позволяет осуществлять быстрый перевод между этими системами счисления, не прибегая к арифметическим операциям.

Вопросы и задания

1. Переведите целые числа из десятичной системы счисления в двоичную систему счисления:
   1) 1025; 2) 512; 3) 600.

2. Переведите целое число 1147 из десятичной системы счисления в системы счисления:
   1) пятеричную;
   2) восьмеричную;
   3) шестнадцатеричную.
3. Переведите двоичные числа в восьмеричную систему счисления:
   1) 1010001001011;
   2) 1010,00100101.
4. Переведите двоичные числа в шестнадцатеричную систему счисления:
   1) 1010001001011;
   2) 1010,00100101.
5. Переведите числа в двоичную систему счисления:
   1) 266_8; 2) 266_{16}.
6. Переведите числа из восьмеричной системы счисления в шестнадцатеричную:
   1) 12754; 2) 1515.
7. Переведите числа из шестнадцатеричной системы счисления в восьмеричную:
   1) 1AE2; 2) 1C1C.
8. Сравните числа:
   1) 125_{16} и 111100010101_2;
   2) 757_8 и 1110010101_2;
   3) $A23_{16}$ и 1232_8.
9. Сколько из чисел C, записанных в двоичной системе счисления, удовлетворяет неравенству $221_8 < C < 95_{16}$? Какие числа?
   1) 10010100_2; 2) 10010110_2; 3) 10010011_2; 4) 10001100_2.
10. Сколько значащих нулей в двоичной записи:
   1) восьмеричного числа 2501;
   2) шестнадцатеричного числа 12A?
11. Среди четырёхзначных восьмеричных чисел, двоичная запись которых содержит ровно 5 единиц, найдите:
   1) наименьшее число;
   2) наибольшее число.
12. Среди трёхзначных шестнадцатеричных чисел, двоичная запись которых содержит ровно 7 нулей, найдите:
   1) наименьшее число;
   2) наибольшее число.

13. Все 5-буквенные слова, составленные из букв О, П, Р, Т, записаны в алфавитном порядке и пронумерованы. Вот начало списка:

1. ООООО
2. ООООП
3. ООООР
4. ООООТ
5. ОООПО

...

Какие слова находятся в этом списке на 531-м и 787-м местах?

14. Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись десятичного числа 82 оканчивается на 5.