Глава 3
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ В КОМПЬЮТЕРЕ

§ 10
Представление чисел в позиционных системах счисления

10.1. Общие сведения о системах счисления

Как только люди начали считать, у них появилась потребность в записи чисел. Находки археологов свидетельствуют о том, что первоначально число предметов отображали равным количеством каких-либо значков (бирок): зарубок, чёрточек, точек. Такая система записи чисел называется единичной (унарной), т. к. любое число в ней образуется путём повторения одного знака, символизирующего единицу.

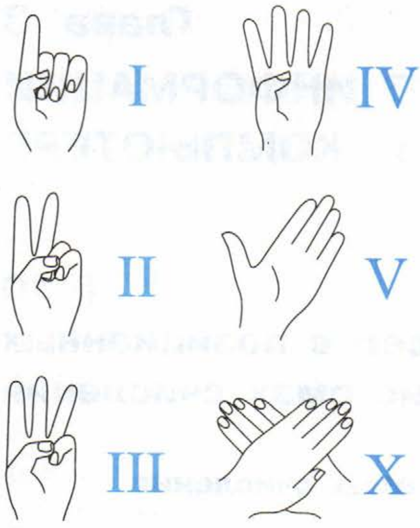
Подумайте, где в наши дни можно найти отголоски унарной системы счисления.

Унарная система — не самый удобный способ записи чисел: записывать таким способом большие значения утомительно, да и сами записи при этом получаются очень длинными. С течением времени возникли иные, более удобные и экономичные системы счисления.

Система счисления или нумерация — это способ записи (обозначения) чисел.

Система счисления — это знаковая система, в которой числа записываются по определённым правилам с помощью символов некоторого алфавита, называемых цифрами. Количество цифр, составляющих алфавит, называется его размерностью или мощностью.

Различают непозиционные и позиционные системы счисления.



В непозиционных системах счисления величина, которую обозначает цифра, не зависит от положения этой цифры в числе.

Примером непозиционной системы, которая сохранилась до наших дней, может служить система счисления, которая применялась более двух с половиной тысяч лет назад в Древнем Риме. В основе римской системы счисления лежали знаки I (один палец) для числа 1, V (раскрытая ладонь) для числа 5, X (две скрещённые ладони) для числа 10, а для обозначения чисел 100, 500 и 1000 стали применять первые буквы соответствующих латинских слов (*centum* — сто, *demimille* — половина тысячи, *mille* — тысяча).

Чтобы записать число, римляне разлагали его на сумму тысяч (M), полутысяч (D), сотен (C), полусотен (L), десятков (X), пятёрок (V), единиц (I). Например, десятичное число 128 представляется следующим образом:

$$\text{CXXVIII} = 100 + 10 + 10 + 5 + 1 + 1 + 1$$

(одна сотня, два десятка, пять, три единицы).

Для записи промежуточных чисел римляне использовали не только сложение, но и вычитание. При этом применялось следующее правило: каждый меньший знак, поставленный справа от большего, прибавляется к его значению, а каждый меньший знак, поставленный слева от большего, вычитается из него.

Например, XI обозначает 11, а IX обозначает 9.

Римскими цифрами пользовались очень долго. Ещё 200 лет назад в деловых бумагах числа должны были обозначаться римскими цифрами (считалось, что обычные арабские цифры легко подделать). Римская система счисления сегодня используется в основном для наименования знаменательных дат, томов, разделов и глав в книгах.

? Подумайте, почему римскую систему счисления нельзя считать полностью непозиционной.

Непозиционные системы счисления имеют ряд существенных недостатков:

- существует постоянная потребность введения новых знаков для записи больших чисел;
- невозможно представлять дробные и отрицательные числа;
- сложно выполнять арифметические операции, т. к. не существует алгоритмов их выполнения.

Всех перечисленных недостатков лишены позиционные системы счисления.

Система счисления называется позиционной, если количественный эквивалент цифры зависит от её положения (места, позиции) в записи числа.

Например, используемая повсеместно десятичная система счисления — позиционная. Рассмотрим число 555. Цифра 5, стоящая в записи этого числа на первом месте, обозначает количество сотен и соответствует числу 500; цифра, стоящая посередине, обозначает 5 десятков (50); последняя цифра 5 соответствует пяти единицам. Исходное число можно представить в виде суммы:

$$555 = 500 + 50 + 5.$$

Потребовалось много тысячелетий, чтобы люди научились называть и записывать числа так, как это делаем мы с вами. Начало этому было положено в Древнем Египте и Вавилоне, а завершили дело индийские математики в V–VII веках нашей эры. Важным достижением индийской науки было введение особого обозначения для пропуска разрядов — нуля. Арабы, познакомившись с этой нумерацией первыми, по достоинству её оценили, усвоили и перенесли в Европу. Получив название арабской, эта система в XII веке нашей эры распространилась по всей Европе. И так как эта система счисления проще и удобнее остальных, быстро их вытеснила.

Французский математик Пьер Симон Лаплас (1749–1827) оценил «открытие» позиционной системы такими словами: «Мысль выражать все числа немногими знаками, придавая им кроме значения по форме ещё значение по месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно оценить, насколько она удивительна».

10.2. Позиционные системы счисления

Существует бесконечно много позиционных систем счисления. Каждая из них определяется целым числом $q > 1$, называемым **основанием** системы счисления. Основание определяет (даёт) название системы счисления: двоичная, троичная, восьмеричная, шестнадцатеричная, q-ичная и т. д. Можно говорить «система счисления с основанием q» (табл. 3.1).

Основное достоинство любой позиционной системы счисления — возможность записи произвольного числа ограниченным количеством символов. Для записи чисел в позиционной системе счисления с основанием q нужен алфавит из q цифр: 0, 1, 2, ..., $q-1$.

Таблица 3.1

Основания и алфавиты систем счисления

Основание	Название	Алфавит
$q = 2$	Двоичная	0, 1
$q = 3$	Троичная	0, 1, 2
$q = 8$	Восьмеричная	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
$q = 16$	Шестнадцатеричная	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

В q-ичной системе счисления q единиц какого-либо разряда образуют единицу следующего разряда.

Целое число без знака A в q-ичной системе счисления представляется в виде конечной суммы степеней числа q — суммы разрядных слагаемых:

$$A = a_{n-1} \cdot q^{n-1} + a_{n-2} \cdot q^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot q^1 + a_0 \cdot q^0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot q^i.$$

Здесь:

- q — основание системы счисления;
- a_i — цифры, принадлежащие алфавиту данной системы счисления ($0 \le a_i \le q-1$);
- q^i — весовой коэффициент разряда.

Последовательность чисел, каждое из которых задаёт «вес» соответствующего разряда, называется **базисом позиционной системы счисления**.

Число A, свёрнутая запись которого в системе счисления с основанием q имеет вид $a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0 a_{-1}\ldots a_{-m}$, может быть представлено в развёрнутой форме как $a_{n-1} \cdot q^{n-1} + a_{n-2} \cdot q^{n-2} + \cdots + a_0 \cdot q^0 + a_{-1} \cdot q^{-1} + \ldots + a_{-m} \cdot q^{-m}$.

Свёрнутой формой записи числа мы пользуемся в повседневной жизни, иначе её называют естественной формой или цифровой.

Развёрнутая форма записи чисел также всем хорошо известна. Ещё в начальной школе дети учатся записывать числа в виде суммы разрядных слагаемых. Например:

$$125\,248 = 1 \cdot 100\,000 + 2 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 1\,000 + 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 8 \cdot 1.$$

Если представить разряды в виде степеней основания, то получим:

$$125\,248 = 1 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0.$$

Аналогичным образом представляются и дроби:

$$0{,}125 = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} = 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}.$$

Иногда бывает полезно преобразовать развёрнутую форму записи числа так, чтобы избежать возведения основания системы счисления в степени.

Например, можно записать:

$$125\,248 = 1 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 = ((((1 \cdot 10 + 2) \cdot 10 + 5) \cdot 10 + 2) \cdot 10 + 4) \cdot 10 + 8;$$

$$0{,}125 = 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} = ((5/10 + 2)/10 + 1)/10.$$

Такую форму представления числа называют разложением по схеме Горнера.

Изучая десятичную систему счисления с раннего возраста и используя её в повседневной практике, многие люди не догадываются о существовании других систем счисления.

Но так ли хороша десятичная система счисления? Великий французский математик и естествоиспытатель Блез Паскаль (1623–1662) писал: «Десятичная система построена довольно неразумно, конечно, в соответствии с людскими обычаями, а вовсе не с требованиями естественной необходимости, как склонно думать большинство людей». В ряде теоретических и практических задач некоторые системы счисления, отличные от десятичной, имеют определённые преимущества.

Первые механические счётные машины были разработаны на основе десятичной системы счисления. Для реализации десяти устойчивых состояний в них использовались сложные системы зубчатых колёс (рис. 3.1). Такие машины были очень громоздки, занимали много места.

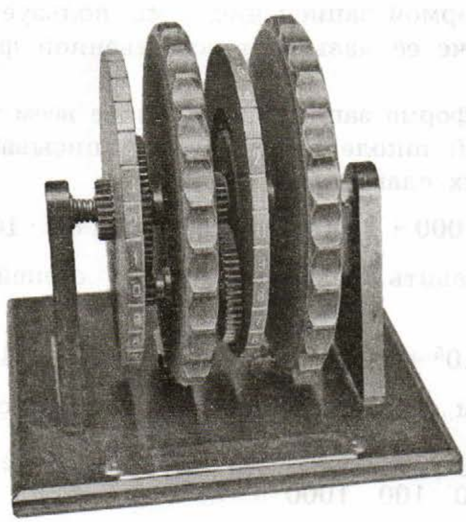


Рис. 3.1. Механизм передачи десятков в арифмометре П. Л. Чебышёва

Так, если бы проект Аналитической машины Ч. Беббиджа — механического прототипа появившихся спустя столетие ЭВМ — был реализован, то по размерам такая машина сравнялась бы с локомотивом. В 1937 году немецкий инженер К. Цузе создал вычислительную машину, основанную на принципах действия аналитической машины Ч. Беббиджа. Она была механической, но работала на основе двоичной системы счисления, что позволило значительно уменьшить её размеры: машина занимала всего 2 м^2 на столе в квартире изобретателя!

В наши дни большой практический интерес представляют двоичная, троичная, восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления.

10.3. Перевод чисел из *q*-ичной в десятичную систему счисления

Перевод числа, записанного в системе счисления с основанием q, в десятичную систему счисления основан на использовании развёрнутой формы записи чисел (рис. 3.2).

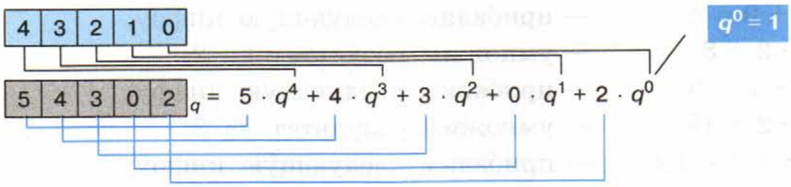


Рис. 3.2. Перевод числа из q-ичной системы счисления в десятичную

Для перевода числа A_q в десятичную систему счисления достаточно:
1) записать развёрнутую форму числа A_q;
2) представить все числа, фигурирующие в развёрнутой форме, в десятичной системе счисления;
3) вычислить значение полученного выражения по правилам десятичной арифметики.

Переведём числа 212_3, 123_5 и $12A_{16}$ в десятичную систему счисления:

$$212_3 = 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 2 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 23_{10};$$
$$123_5 = 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 2 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 63_{10};$$
$$12A_{16} = 1 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + A \cdot 16^0 = 1 \cdot 256 + 2 \cdot 16 + 10 \cdot 1 = 298_{10}.$$

Перевод в десятичную систему счисления целых двоичных чисел будет значительно проще, если вспомнить и использовать уже знакомую вам таблицу степеней двойки:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Например:

$$1001110011_2 = \overset{9}{1}\overset{8}{0}\overset{7}{0}\overset{6}{1}\overset{5}{1}\overset{4}{1}\overset{3}{0}\overset{2}{0}\overset{1}{1}\overset{0}{1} = 512 + 64 + 32 + 16 + 2 + 1 = 627_{10}.$$

Для перевода двоичного числа в десятичную систему счисления можно воспользоваться схемой Горнера:

1) $1 \cdot 2 = 2$ — возьмем 1, соответствующую самому старшему разряду числа, и умножим её на 2;
2) $2 + 0 = 2$ — прибавим следующую цифру;
3) $2 \cdot 2 = 4$ — умножим результат на 2;

4) $4 + 0 = 4$ — прибавим следующую цифру;
5) $4 \cdot 2 = 8$ — умножим результат на 2;
6) $8 + 1 = 9$ — прибавим следующую цифру;
7) $9 \cdot 2 = 18$ — умножим результат на 2;
8) $18 + 1 = 19$ — прибавим следующую цифру;
9) $19 \cdot 2 = 38$ — умножим результат на 2;
10) $38 + 1 = 39$ — прибавим следующую цифру;
11) $39 \cdot 2 = 78$ — умножим результат на 2;
12) $78 + 0 = 78$ — прибавим следующую цифру;
13) $78 \cdot 2 = 156$ — умножим результат на 2;
14) $156 + 0 = 156$ — прибавим следующую цифру;
15) $156 \cdot 2 = 312$ — умножим результат на 2;
16) $312 + 1 = 313$ — прибавим следующую цифру;
17) $313 \cdot 2 = 626$ — умножим результат на 2;
18) $626 + 1 = 627$ — прибавим последнюю цифру.

Рассмотрим несколько примеров решения задач.

Пример 1. Десятичное число 57 в некоторой системе счисления записывается как 212. Определим основание этой системы счисления.

Запишем условие задачи иначе: $212_q = 57_{10}$, $q > 2$.

Представим в виде суммы разрядных слагаемых:

$$212_q = 2 \cdot q^2 + 1 \cdot q^1 + 2 \cdot q^0 = 2q^2 + q + 2 = 57_{10}.$$

Решим уравнение: $2q^2 + q + 2 = 57$.

$$2q^2 + q - 55 = 0.$$

Это квадратное уравнение, его корни $x_1 = -5{,}5$; $x_2 = 5$.

Так как основание системы счисления должно быть натуральным числом, то $q = 5$.

Пример 2. Все пятибуквенные слова, составленные из пяти букв А, И, Р, С, Т, записаны в алфавитном порядке.

Вот начало списка:

1. АААAА
2. ААААИ
3. ААААР
4. ААААС
5. ААААТ
6. АААИА

...

Необходимо найти ответы на два вопроса.

1. На каком месте от начала списка стоит слово ИСТРА?
2. Сколько всего слов в этом списке?

Введём следующие обозначения: А — 0, И — 1, Р — 2, С — 3, Т — 4. Перепишем в новых обозначениях исходный список:

1. 00000
2. 00001
3. 00002
4. 00003
5. 00004
6. 00010

...

Теперь перед нами последовательность чисел от 0 до 44444, записанных в пятеричной системе счисления. При этом на 1-м месте в этой последовательности находится 0, на 2-м месте — 1, на 3-м месте — 2 и т. д. Это значит, что само число на единицу меньше того места (номера), которое оно занимает в последовательности.

Представив слово ИСТРА в новых обозначениях, получим 13420_5. Переведём это пятеричное число в десятичную систему счисления:

$$13420_5 = 1 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0 = \\ = 625 + 375 + 100 + 10 = 1110_{10}.$$

Это число находится в списке на 1111-м месте.

Чтобы выяснить, сколько всего слов в списке, запишем его самое последнее слово: ТТТТТ. Ему соответствует число 44444_5.

$$44444_5 = 4 \cdot 5^4 + 4 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 3124_{10}.$$

В списке это число стоит на 3125-м месте.

Вспомните о комбинаторике и предложите другой способ подсчёта количества слов в нашем списке.

Пример 3. Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 60, запись которых в четверичной системе счисления оканчивается на 31.

В четверичной системе счисления используются цифры 0, 1, 2 и 3; число представляется в виде суммы разрядных слагаемых:

4^0	4^1	4^2	4^3	...
1	4	16	64	

Из этой таблицы видно, что интересующие нас числа (≤ 60) не будут более чем трёхзначными. С учётом того что их запись заканчивается на 31, определим первую цифру (k):

$$k \cdot 16 + 3 \cdot 4 + 1 \le 60,\ k \cdot 16 \le 47,\ k \in \{0,\ 1,\ 2\}.$$

Искомые числа: $31_4 = 13_{10}$ ($k = 0$), $131_4 = 29_{10}$ ($k = 1$), $231_4 = 45_{10}$ ($k = 2$).

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Система счисления — это способ записи (обозначения) чисел. Система счисления называется позиционной, если количественный эквивалент цифры зависит от её положения (места, позиции) в записи числа.

Существует бесконечно много позиционных систем счисления. Каждая из них определяется целым числом $q > 1$, называемым основанием системы счисления. Для записи чисел в позиционной системе счисления с основанием q нужен алфавит из q цифр: 0, 1, 2, ..., $q - 1$.

Число A, свёрнутая запись которого в системе счисления с основанием q имеет вид $a_{n-1}a_{n-2}...a_0,a_{-1}...a_{-m}$, может быть представлено в развёрнутой форме как $a_{n-1} \cdot q^{n-1} + a_{n-2} \cdot q^{n-2} + ... + a_0 \cdot q^0 + a_{-1} \cdot q^{-1} + ... + a_{-m} \cdot q^{-m}$.

Для перевода числа A_q в десятичную систему счисления достаточно:

1) записать развёрнутую форму числа A_q;
2) представить все числа, фигурирующие в развёрнутой форме, в десятичной системе счисления;
3) вычислить значение полученного выражения по правилам десятичной арифметики.

Вопросы и задания

1. Что такое система счисления? Какие классы систем счисления принято выделять?
2. Дайте определение позиционной системы счисления. Что называется алфавитом системы счисления? Что называется базисом позиционной системы счисления? Что называется основанием позиционной системы счисления?
3. Сколько цифр используется в системе счисления с основанием 2, 3, 5, 8, 16, 100, q?
4. Какая форма записи числа называется развёрнутой?

5. Запишите в развёрнутой форме числа:
1) $143{,}511_{10}$; 2) $1435{,}11_8$; 3) $143{,}511_{16}$.
6. Воспользуйтесь схемой Горнера для представления чисел:
1) 12345_{10}; 2) 12345_8; 3) $0{,}12345_6$.
7. Вычислите десятичные эквиваленты следующих чисел:
1) 120_3; 2) $100{,}21_4$; 3) $5A{,}124_{16}$.
8. Существует ли треугольник, длины сторон которого выражаются числами 12_8, 122_3 и 11011_2?
9. Укажите целые десятичные числа, принадлежащие следующим числовым промежуткам:
1) $[202_3;\ 1000_3]$; 2) $[14_8,\ 20_8]$; 3) $[28_{16},\ 30_{16}]$.
10. Найдите основание x системы счисления, если известно:
1) $47_{10} = 21_x$; 2) $1331_x = 6_{10}$.
11. Десятичное число 63 в некоторой системе счисления записывается как 120. Определите основание системы счисления.
12. Какое из чисел C, записанных в двоичной системе счисления, удовлетворяет неравенству $9D_{16} < C < 237_8$?
1) 10011010_2; 2) 10011110_2; 3) 10011111_2; 4) 11011110_2.
13. Как изменится величина чисел $311{,}211_4$ и $23{,}45_6$ при переносе запятой на:
1) один знак вправо;
2) два знака влево?
14. При переносе запятой на два знака вправо число $240{,}13_x$ увеличилось в 25 раз. Чему равно x?
15. Какое наибольшее десятичное число можно записать тремя цифрами в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления?
16. Найдите наименьшие основания систем счисления x и y, исходя из условий:
1) $23_x = 21_y$; 2) $51_x = 15_y$; 3) $144_x = 441_y$.
17. Решите уравнение $54_7 + x = 320_5$.
18. Все трёхбуквенные слова, составленные из букв И, М, Р, записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:
1. ИИИ
2. ИИМ
3. ИИР
4. ИМИ
...

Выясните общее количество слов в этом списке. На каких местах в этом списке стоят слова МИМ, МИР, РИМ?

19. Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 26, запись которых в троичной системе счисления оканчивается на 22.

20. Трёхзначное число, записанное в системе с основанием 3, при перестановке крайних цифр становится числом, выражающим то же количество, но уже в системе с основанием 4. Найдите это число.

21. Исполнитель умеет сравнивать однозначные числа, представленные в некоторой позиционной системе счисления. Составьте для него:

1) алгоритм сравнения двух двузначных чисел;

2) алгоритм сравнения двух n-значных чисел.